Aufgaben zu Kapitel 10, 11 und (ein wenig) 12

Aufgabe 1: Kurvendiskussion (i)

Aufgabe 2: Kurvendiskussion (ii)

Aufgabe 3: (∗) Kurvendiskussion (iii)

Aufgabe 4: (∗) Beweis einer Ungleichung

Aufgabe 5: (∗) Zores mit dem Hund

Aufgabe 6: Kummer mit der Ziege

Aufgabe 7: Spaß mit der Exponentialfunktion

Aufgabe 8: Die artige Ableitung

Aufgabe 9: Hauptsatz

Aufgabe 10: (∗) Integralzeugs

Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- f ist ungerade
- Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \tag{asy-1}$$

- Nullstelle: $x = 0$
- Erste Ableitung; stationäre Punkte (Nullstellen von f'):

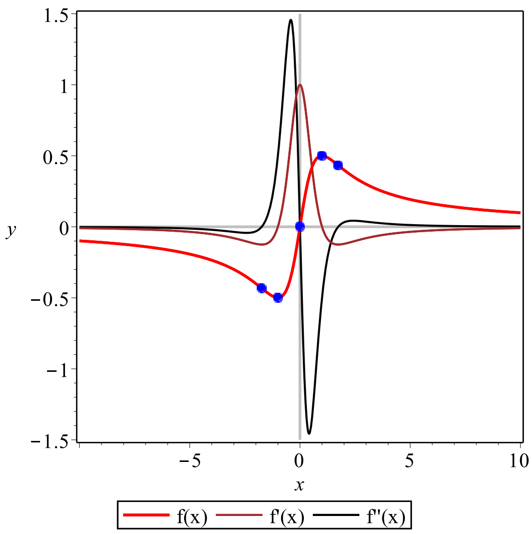
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

- Zweite Ableitung; Nullstellen von f'':

$$f''(x) = \ldots = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$\Rightarrow$
  - Lokales Maximum für $x = +1$. Ist auch globales Maximum wegen (asy-1)

    Lokales Minimum für $x = -1$. Ist auch globales Minimum wegen (asy-1)
  - Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$ (dort ist[1] $f'''(x) \neq 0$, also ✓)
- Skizze:



□

[1] f''' elementar aber per Hand etwas mühsam zu berechnen: $f'''(x) = -6\,\frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(1+x^2)^4}$

a) [L] Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie eine Skizze an.

b) [L] Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass für f aus **a)** gilt

$$f(x) = c\,x^3 + \mathcal{O}(|x|^4) \quad \text{für} \quad x \to 0$$

---

a)

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- $\operatorname{sgn}(f(x)) \equiv \operatorname{sgn}(x)$
- Nullstelle: $x = 0$
- Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \tag{asy-2}$$

- Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(x^3 - 3\,x^2)\,e^{-x} \\ f''(x) &= (x^3 - 6\,x^2 + 6\,x)\,e^{-x} \\ f'''(x) &= -(x^3 - 9\,x^2 + 18\,x - 6)\,e^{-x} \end{aligned}$$

- Stationäre Punkte (Nullstellen von f') :

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = 0,\ x = 3$$

mit

$$f''(0) = 0, \qquad f''(3) < 0$$

$\Rightarrow$ lokales Maximum an $x = 3$. Ist auch <u>globales</u> Maximum wegen (asy-2).

Die Stelle $x = 0$ wird im Folgenden untersucht.

- Nullstellen von f'' :

$$f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = 0,\ x = 3 \pm \sqrt{3}$$

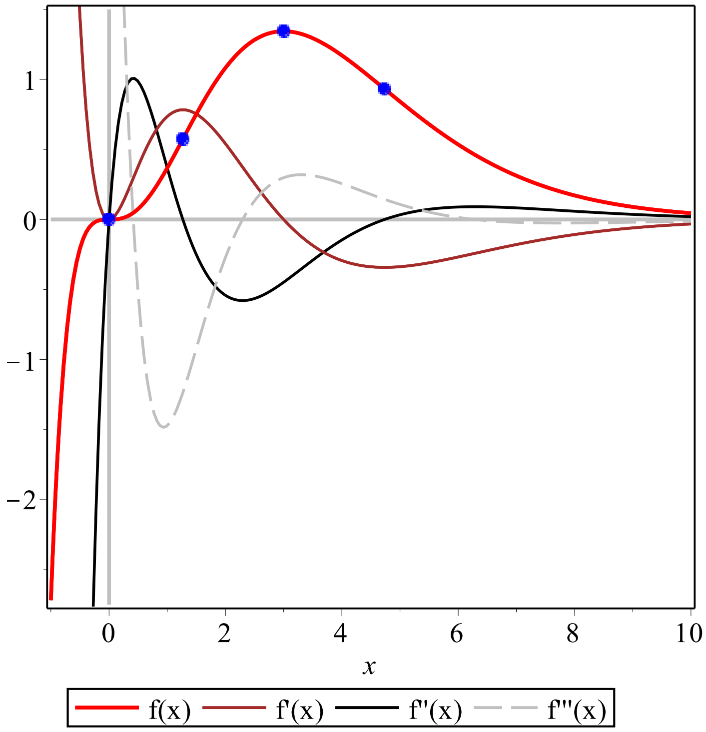
mit

$$f'''(0) \neq 0, \qquad f'''(3 \pm \sqrt{3}) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt an $x = 0$, Wendepunkte an $x = 3 \pm \sqrt{3}$.

⟶

- Skizze:



b) Zunächst gilt offensichtlich $f(x) = \mathcal{O}(|x|^3)$ für $x \to 0$.

Wegen $e^{-x} = 1 + \mathcal{O}(|x|)$ gilt genauer:

$$f(x) = x^3\big(1 + \mathcal{O}(|x|)\big) = c\,x^3 + \mathcal{O}(|x|^4) \quad \text{mit} \quad c = 1$$

Dies entspricht der Taylor-Entwicklung von f um $x = 0$ mit Restglied $\mathcal{O}(|x|^4)$. (Beachte $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6$.)

$\square$

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(x + \tfrac{1}{x}\right)$$

a) [L] Führen Sie eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie eine Skizze an.

Berechnung der dritten Ableitung: nur für Masochist[inn]en, bzw. problemlos mittels Computeralgebra.

b) [L] Geben Sie für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ die Lösungen x der Gleichung $f(x) = c$ an (sofern eine reelle Lösung existiert).

c) [L] Zeigen Sie, dass das Produkt der unter **b)** gefundenen Lösungen $x_i(c)$ unabhängig von c ist, und zwar

– durch direktes Nachrechnen,

– mittels eines qualitativen Argumentes, das auf der Gestalt von f beruht.

---

a)

- Definitionsbereich: $D = (0, \infty)$ $\rightsquigarrow$ im Weiteren durchwegs $x > 0$.
- Beachte
$$f(x) = f\left(\tfrac{1}{x}\right)$$
- Nullstellen von f:
$$0 \overset{!}{=} \ln\left(x + \tfrac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0$$
Keine reelle Nullstelle, und es gilt $f(x) > 0$ für alle $x > 0$.
- Asymptotisches Verhalten:
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \text{(asy-3)}$$
- Ableitungen:
$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x\,(x^2 + 1)}$$
$$f''(x) = \ldots = -\frac{x^4 - 4\,x^2 - 1}{x^2\,(x^2 + 1)^2}$$
$$f'''(x) = \ldots = \frac{2\,(x^6 - 9\,x^4 - 3\,x^2 - 1)}{x^3\,(x^2 + 1)^3}$$

⟶

- Stationäre Punkte (Nullstellen $x > 0$ von f'):

$$f'(x) \overset{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = 1$$

mit $f''(1) = 1 \;\Rightarrow\;$ lokales Minimum an $x = 1$.
Ist auch globales Minimum wegen (asy-3).

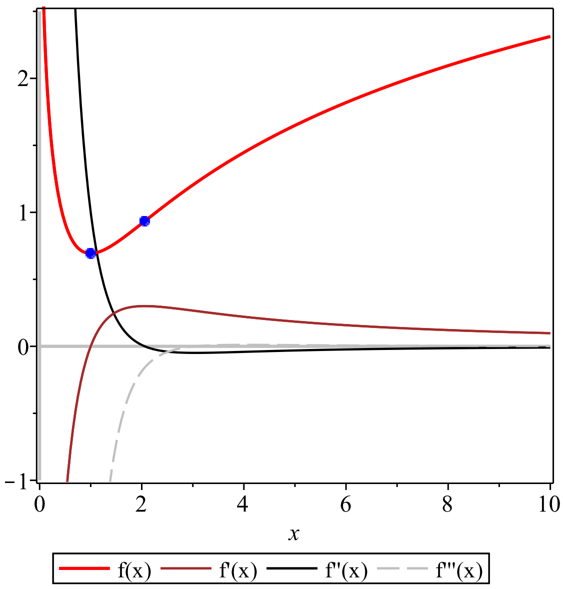
- Nullstellen $x > 0$ von f'' (mit $x^2 = u$):

$$x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 4u - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 2 + \sqrt{5}$$

$$\rightsquigarrow \quad x = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2.058$$

mit $f'''(x) \neq 0 \;\rightsquigarrow\;$ Wendepunkt.

- Skizze:



b) Die Gleichung $\ln(x + \frac{1}{x}) = c$ ist äquivalent zu

$$x + \frac{1}{x} = e^c \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - e^c x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(e^c \pm \sqrt{e^{2c} - 4}\right)$$

Die Lösungen x_1, x_2 sind reell und positiv, falls

$$e^{2c} \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad c \geq \tfrac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$$

Grenzfall: Doppelte Lösung $x_1 = x_2 = 1$ für $c = \ln 2$. Dies entspricht der Minimalstelle von f, siehe **a)**.

⟶

c)

- Aus **b)**:

$$x_1 \cdot x_2 = \tfrac{1}{4}\Big(e^c + \sqrt{e^{2c}-4}\Big) \cdot \Big(e^c - \sqrt{e^{2c}-4}\Big)$$
$$= \tfrac{1}{4}\Big(e^{2c} - (e^{2c}-4)\Big) = 1 \quad \text{unabhängig von } c \quad \checkmark$$

- Bzw. direkt aus der Definition von f:

Für $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ gelte $f(x_1) = f(x_2) = c$.

$\rightsquigarrow$ Es gilt unabhängig von c:

$$\ln\Big(\underbrace{x_1 + \tfrac{1}{x_1}}_{\geq 2}\Big) = \ln\Big(\underbrace{x_2 + \tfrac{1}{x_2}}_{\geq 2}\Big)$$

Da die Funktion $\ln\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$ injektiv ist, folgt

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$\Rightarrow$ Für $x_1 \neq x_2$ muss gelten $x_1 \cdot x_2 = 1$ $\checkmark$

($x_1 = x_2 = 1$ ist ein Sonderfall, siehe **b)**.)

$\square$

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

- Es gilt $f(x) = \dfrac{(1+x)^n}{x} > 0$ für alle $x > 0$, mit

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

- Suche Minimalstelle in $(0, \infty)$. Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{n\,(1+x)^{n-1}\,x - (1+x)^n}{x^2} = \frac{(1+x)^{n-1}\big(nx - (1+x)\big)}{x^2}$$

$$= \frac{(1+x)^{n-1}\big((n-1)\,x - 1\big)}{x^2}$$

$\rightsquigarrow$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

mit [1]

$$f\left(\tfrac{1}{n-1}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\frac{1}{n-1}} = \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)(n-1)$$

$$= \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}(n - 1 + 1) < n\,e \quad \checkmark$$

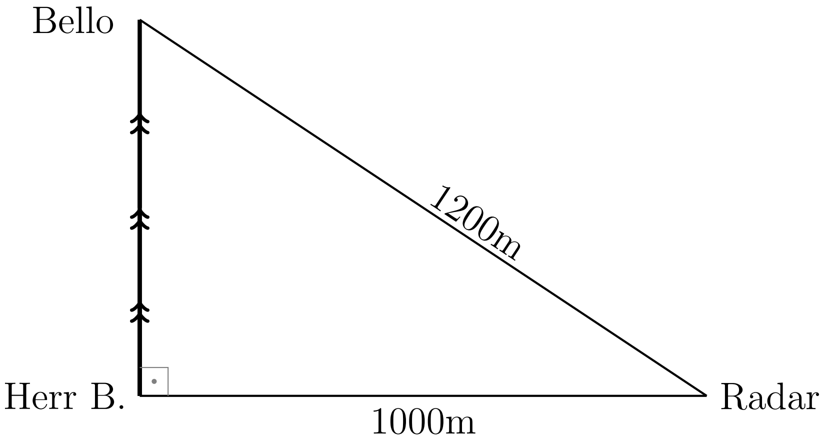
- $x = \frac{1}{n-1}$ ist globale Minimalstelle von f.
- $n = 1$ ist Sonderfall. Keine Minimalstelle, aber $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$. Wähle $x > 1/(e-1)$.

$\square$

[1] Beachte: Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)$ ist monoton wachsend und konvergiert (von unten her) gegen e.

Herr B. geht mit seinem Hund Bello entlang einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Plötzlich erblickt Bello etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig senkrecht zur Straße davon. Herr B. bleibt indes stehen; 1000 m von seinem Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m vom Radar entfernt ist, wird er gemessen, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radar wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gesehen).

Die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit sei 20 km/h. *Muss Herr B. ein Strafmandat begleichen?*



[Skizze:] Zum Zeitpunkt des Blitzens ist

- $x = 1000$ ... Abstand Herr B. – Radar (horizontal, konstant)
- $r = 1200$ ... Abstand Bello – Radar (diagonal)
- y ... Abstand Herr B. – Bello (vertikal)

  $\rightsquigarrow$ (nach Pythagoras):
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \approx 663.32$$

Der Abstand Herr B. – Bello ist eine Funktion der Hundelaufzeit t, $y = y(t)$, und somit auch $r = r(t) = \sqrt{x^2 + y(t)^2}$. Zum Zeitpunkt des Blitzens ist $r(t) = 1200$, und laut Angabe

$$3 = r'(t) = \tfrac{d}{dt}\sqrt{x^2 + y(t)^2} = \frac{y(t)\, y'(t)}{r(t)} \approx \frac{663.32\, y'(t)}{1200}$$

$\Rightarrow$
$$y'(t) \approx \frac{3 \cdot 1200}{663.32} \approx 5.43\,\mathrm{m/s} \approx 19.55\,\mathrm{km/h}\,. \quad \text{Kein Strafmandat.}$$

□

Gegeben sei die rechteckige Grundriss einer Hütte. Die Länge der Seite a ist gegeben durch $a = 5$m, die Länge der Seite b beträgt $b = 8$m.

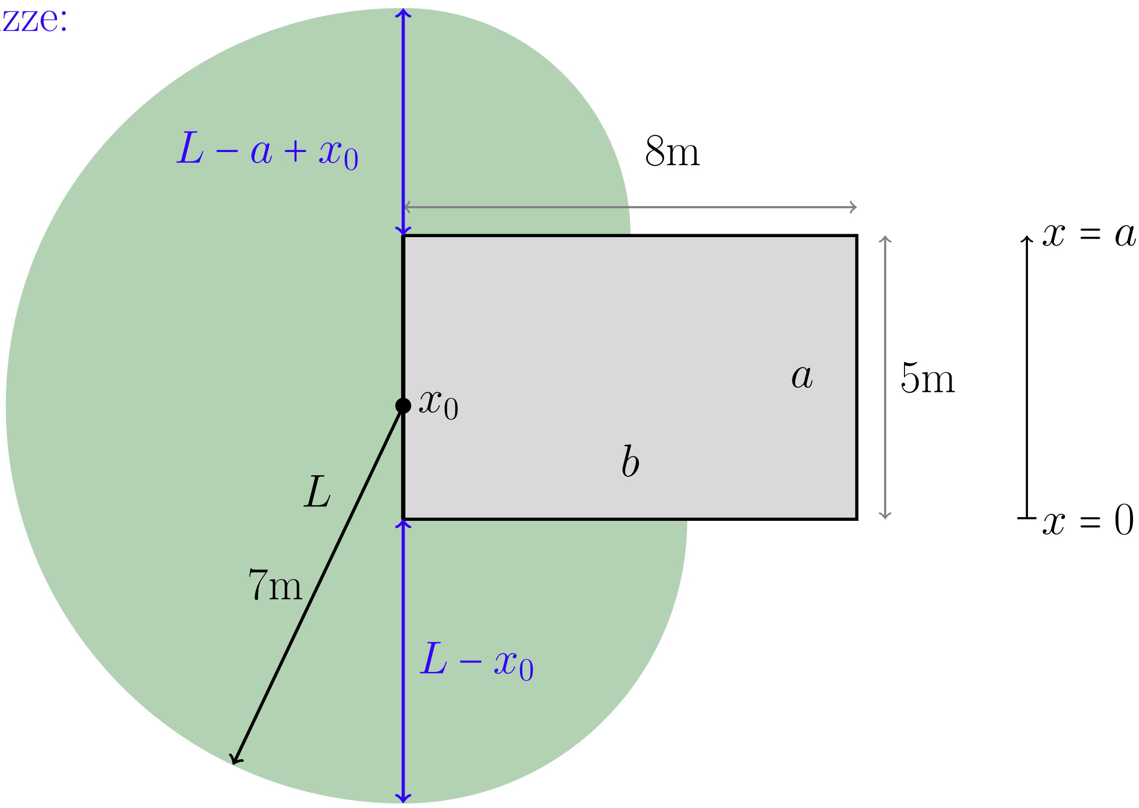
Weil die Ziege immer wieder ausbüchst, leint sie der Bauer an. Die Leine L misst $L = 7$m. Die Ziege wird irgendwo am Punkt x_0 auf der Hüttenseite a angebunden.

a) [L] Fertigen Sie eine Skizze an. Geben Sie eine Formel für die Fläche $A = A(x_0)$ (außerhalb der Hütte) in Abhängigkeit von x_0 an, welche die Ziege an der Leine erreichen kann.

b) [L] Wie lautet der Punkt $x_0 = x_0^{\min} \in [0, a]$, so dass die Fläche A minimal ist? Wie groß ist diese Fläche?

---

a) Skizze:



Die Fläche $A = A(x_0)$ setzt sich aus drei Teilen zusammen, und zwar aus einem Halbkreis mit Radius L und zwei Viertelkreisen mit Radien $L - a + x_0$ und $L - x_0$. $\rightsquigarrow$ quadratische Funktion

$$A(x_0) = \frac{1}{2} L^2 \pi + \frac{1}{4} (L - x_0)^2 \pi + \frac{1}{4} (L - a + x_0)^2 \pi$$

---

b) Bestimme Minimalstelle:

$$A'(x_0) = -\frac{1}{2} (L - x_0) \pi + \frac{1}{2} (L - a + x_0) \pi = \frac{1}{2} (2 x_0 - a) \pi \overset{!}{=} 0$$

$\longrightarrow$

$\Rightarrow$

$$x_0^{\min} = \tfrac{a}{2} = 2.5\,\mathrm{m}$$

Dies entspricht tatsächlich einem eindeutigen Minimum, die Funktion A strikt konvex ist,

$$A''(x_0) \equiv \pi > 0$$

Minimale Fläche:

$$A(x_0^{\min}) = \tfrac{1}{2}\left(L^2 + (L - \tfrac{a}{2})^2\right)\pi \approx 108.78\,\mathrm{m}^2$$

□

a) [L] Gegeben sei die von dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ abhängige Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to [0,1], \quad f(x) = \exp(-x^n)$$

f ist strikt monoton fallend und hat einen Wendepunkt an einer Stelle $x > 0$. Wo befindet sich dieser Wendepunkt? Überlegen Sie auch, wie der Graph von f aussieht, wenn n sehr groß wird.

b) [L] Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Für gewisse Konstanten $A, B > 0$ gelte

$$A\, f(x) \le f'(x) \le B\, f(x), \quad x \ge 0$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \ge 0$ gilt

$$f(0)\exp(A\,x) \le f(x) \le f(0)\exp(B\,x)$$

---

a) Ableitungen von f:

$$f'(x) = -n\,x^{n-1} f(x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -n(n-1)\,x^{n-2} f(x) - n\,x^{n-1} f'(x) \\ &= -n(n-1)\,x^{n-2} f(x) - n\,x^{n-1}\big(-n\,x^{n-1} f(x)\big) \\ &= -n\,x^{n-2}\left(n-1-n\,x^n\right) f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f''(x) = 0$ für

$$x = \sqrt[n]{1-\tfrac{1}{n}} > 0$$

Dies ist ein Wendepunkt.[1]

Verlauf von f in Abhängigkeit von n:

$$f(x) \begin{cases} = 1, & x = 0 \\ \to 1, & x \in (0,1) \\ = 1/e, & x = 1 \\ \to 0, & x > 1 \end{cases}$$

… stetig für alle n, aber für sehr große Werte von n sieht das (rein optisch) aus wie das 'Rechteckssignal'

$$f(x) \begin{cases} = 1, & 0 \le x < 1 \\ = 0, & x > 1 \end{cases}$$

⟶

[1] Dies gilt für $n \ge 2$. Man zeigt auch, dass tatsächlich gilt $f'''(x) \ne 0$.
Beachte: $n = 1$ ist ein Sonderfall (kein Wendepunkt).

b)

- Wir wollen zeigen

$$f(0) \le f(x)\exp(-A\,x) =: F(x)$$
$$f(0) \ge f(x)\exp(-B\,x) =: G(x)$$

(stimmt das?)

- Laut Voraussetzung über f gilt

$$F'(x) = f'(x)\exp(-A\,x) - Af(x)\exp(-A\,x) = \underbrace{\big(f'(x) - Af(x)\big)}_{\ge 0}\exp(-A\,x) \ge 0$$

und

$$G'(x) = f'(x)\exp(-B\,x) - Bf(x)\exp(-B\,x) = \underbrace{\big(f'(x) - Bf(x)\big)}_{\le 0}\exp(-B\,x) \le 0$$

$\Rightarrow$ für $x \ge 0$:

$$f(0) = F(0) \le F(x)$$
$$f(0) = G(0) \ge G(x)$$

✓ (ja, stimmt)

□

a) [L] Beweisen Sie das Additionstheorem für $\cos(x+y)$ mittels Zurückführung auf das Additionstheorem für $\sin(x+y)$.

b) [L] Beweisen Sie (ohne Verwendung des Additionstheorems für arctan):

$$\arctan(x) + \arctan(\tfrac{1}{x}) = \text{const.} \quad \text{für } x > 0$$

Wie lautet der Wert der Konstante?

---

a) Gehe aus von

$$\sin(x+y) \equiv \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Für festes y folgt daraus durch Ableiten beider Seiten nach x:

$$\cos(x+y) \equiv \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \checkmark$$

---

b) Die behauptete Identität ist richtig, falls gilt

$$0 \equiv \frac{d}{dx}\Big(\arctan(x) + \arctan(\tfrac{1}{x})\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \equiv \underbrace{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{=0} \qquad \checkmark$$

Weiters: Für $x = 1$ gilt $\arctan(x) = \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$ [1]

$$\arctan(x) + \arctan(\tfrac{1}{x}) \equiv \tfrac{\pi}{2} \quad \text{für } x > 0$$

□

[1] Für $x < 0$ mit umgekehrtem Vorzeichen, da arctan ungerade.

Berechnen Sie

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)\sin(t^2)\,dt$$

ohne das Integral auszurechnen (es ist nicht elementar bestimmbar).

Dies ist ein Parameterintegral,[1] d.h., nicht nur die obere Grenze sondern auch der Integrand hängen von dem Parameter x ab, allerdings in sehr einfacher Weise:

$$\int_0^x (x-t)\sin(t^2)\,dt = x\int_0^x \sin(t^2)\,dt - \int_0^x t\sin(t^2)\,dt$$

$2\times$ Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung[2] $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin(t^2)\,dt \\
&= \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x \sin(t^2)\,dt\right) - \frac{d}{dx}\left(\int_0^x t\sin(t^2)\,dt\right) \\
&= \int_0^x \sin(t^2)\,dt + x\,\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)\,dt - x\sin(x^2) \\
&= \int_0^x \sin(t^2)\,dt + \cancel{x\sin(x^2)} - \cancel{x\sin(x^2)}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)\sin(t^2)\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)\,dt = \sin(x^2)$$

□

[1] Bekannte allgemeine Formeln für Ableitungen eines Parameterintegrals führen auf die gleiche Lösung.
[2] & Produktregel

a) [L] Sei F eine Stammfunktion von f. Stellen Sie das Integral

$$\int x\, f(1+x^2)\, dx$$

mittels F dar.

b) [L] Stellen Sie das Integral

$$\int \big(f(x)\, g''(x) - f''(x)\, g(x)\big)\, dx$$

mittels f, f', g, g' dar.

c) [L] Berechnen Sie

$$\int \big(f(x)\big)^n f'(x)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mittels zweier verschiedener Integrationstechniken.

---

a) $F'(1+x^2) = 2\,x\, f(1+x^2) \quad \rightsquigarrow$

$$\int x\, f(1+x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int F'(1+x^2)\, dx. = \frac{1}{2} F(1+x^2) + C$$

Bzw. dazu äquivalent: Deutung als Substitution:

$$\int x\, f(1+x^2)\, dx = \left| \begin{array}{c} 1+x^2 = u \\ 2\,x\,dx = du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2} F(u) + C = \frac{1}{2} F(1+x^2) + C$$

---

b) Partielle Integration (Kurzschreibweise) :

$$\int \underbrace{f}_{f}\ \underbrace{g''}_{v'} = \underbrace{f}_{f}\ \underbrace{g'}_{v} - \int \underbrace{f'}_{f'}\ \underbrace{g'}_{v}$$

und analog mit Vertauschung der Rollen von f und g $\Rightarrow$

$$\int (f\, g'' - f''\, g) = f\, g' - f'\, g + C$$

$\longrightarrow$

c) **(i)** Substitution $u = f(x),\ du = f'(x)\,dx \quad \rightsquigarrow$

$$\int (f(x))^n\, f'(x)\,dx = \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

(ii) Partielle Integration (Kurzschreibweise):

$$I := \int \underbrace{f^n}_{g}\ \underbrace{f'}_{f'} = \underbrace{f^n}_{g}\ \underbrace{f}_{f} - \int \underbrace{n\,f^{n-1}\,f'}_{g'}\ \underbrace{f}_{f} = f^{n+1} - n\,I$$

$\Rightarrow$

$$I = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

$\square$