Aufgaben zu Kapitel 10, 11 und (ein wenig) 12

Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie eine Skizze an.

a) Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass für f aus **a)** gilt

$$f(x) = c\,x^3 + \mathcal{O}(|x|^4) \quad \text{für} \quad x \to 0$$

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

a) Führen Sie eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie eine Skizze an.

Berechnung der dritten Ableitung: nur für Masochist[inn]en, bzw. problemlos mittels Computeralgebra.

b) Geben Sie für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ die Lösungen x der Gleichung $f(x) = c$ an (sofern eine reelle Lösung existiert).

c) Zeigen Sie, dass das Produkt der unter **b)** gefundenen Lösungen $x_i(c)$ unabhängig von c ist, und zwar

– durch direktes Nachrechnen,

– mittels eines qualitativen Argumentes, das auf der Gestalt von f beruht.

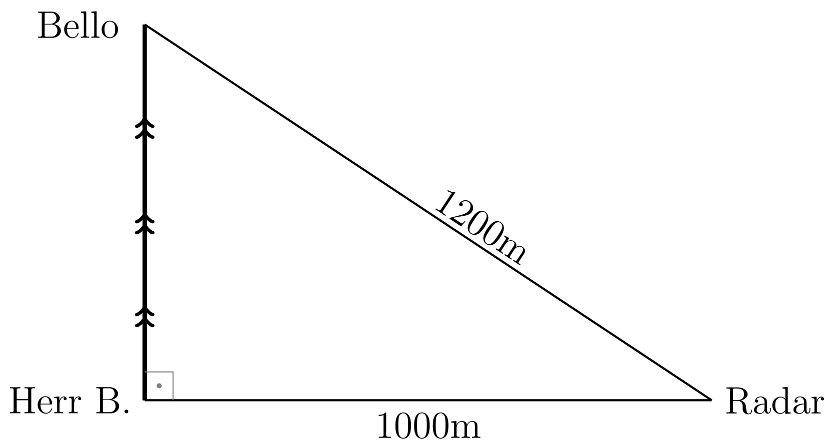
Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

Herr B. geht mit seinem Hund Bello entlang einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Bello erblickt etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig in einem Winkel senkrecht zur Straße davon. 1000 m von Herrn B.'s Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m von diesem entfernt ist, blitzt ihn das Radar, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radargerät wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gemessen).

Die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit sei 20 km/h*. Muss Herr B. ein Strafmandat begleichen?*



Gegeben sei die rechteckige Grundriss einer Hütte. Die Länge der Seite a ist gegeben durch $a = 5\text{m}$, die Länge der Seite b beträgt $b = 8\text{m}$.

Weil die Ziege immer wieder ausbüchst, will sie der Bauer anleinen. Die Leine L misst $L = 7\text{m}$. Die Ziege wird irgendwo am Punkt x_0 auf der Hüttenseite a angebunden

a) Fertigen Sie eine Skizze an. Geben Sie eine Formel für die Fläche A (außerhalb der Hütte) in Abhängigkeit von x_0 an, welche die Ziege an der Leine erreichen kann.

b) Wie lautet der Punkt $x_0 = x_0^{\max} \in [0, a]$, so dass die Fläche A maximal ist? Wie groß ist diese Fläche?

a) Gegeben sei die von dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ abhängige Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to [0,1], \quad f(x) = \exp(-x^n)$$

f ist strikt monoton fallend und hat einen Wendepunkt an einer Stelle $x > 0$. Wo befindet sich dieser Wendepunkt? Überlegen Sie auch, wie der Graph von f aussieht, wenn n sehr groß wird.

b) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Für gewisse Konstanten $A, B > 0$ gelte

$$A\, f(x) \le f'(x) \le B\, f(x), \quad x \in [0,\infty)$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \ge 0$ gilt

$$f(0)\exp(A\,x) \le f(x) \le f(0)\exp(B\,x)$$

a) Beweisen Sie das Additionstheorem für $\cos(x+y)$ mittels Zurückführung auf das Additionstheorem für $\sin(x+y)$.

b) Beweisen Sie (ohne Verwendung des Additionstheorems für arctan):

$$\arctan(x) + \arctan(\tfrac{1}{x}) \ = \ \text{const.} \quad \text{für } x > 0$$

Wie lautet der Wert der Konstante?

Berechnen Sie

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x-t) \sin(t^2)\, dt$$

ohne das Integral auszurechnen (es ist nicht elementar bestimmbar).

a) Sei F eine Stammfunktion von f. Stellen Sie das Integral

$$\int x f(1+x^2)\,dx$$

mittels F dar.

b) Stellen Sie das Integral

$$\int \big(f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x)\big)\,dx$$

mittels f, f', g, g' dar.

c) Berechen Sie

$$\int \big(f(x)\big)^n f'(x)\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

mittels zweier verschiedener Integrationstechniken.