

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)
Nachtest (FR, 21.02.2020) (*mit Lösung*)

• **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wobei

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Geben Sie auch eine kurze Begründung für die Korrektheit Ihrer Herleitung an.

[a): 1 P.]

Mit

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ergibt sich nach den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \cdot e^1 = 1$$

als Produkt zweier bekannter konvergenter Folgen.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{(k-m)!} \quad ?$$

Liegt auch absolute Konvergenz vor? Bitte begründen.

[b): 1 P.]

Verwende Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\frac{\frac{|x^{k+1}|}{(k+1-m)!}}{\frac{|x^k|}{(k-m)!}} = \frac{|x|^{k+1} (k-m)!}{|x|^k (k+1-m)!} = \frac{|x|}{k+1-m} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

⇒ Die Reihe konvergiert absolut für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

[c): 1 P.]

Beweis: vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$\stackrel{\text{ind}}{=} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{n+2 - (n+1)}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!} \quad \checkmark$$

• **Aufgabe 2.**

- a) Für welche Werte des reellen Parameters $\alpha > 0$ hat die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha \ln x$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit? Berechnen Sie für diesen Fall auch den betreffenden Wert des Limes $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ in Abhängigkeit von α mit Hilfe einer geeigneten Formel. [a): 1 P.]

Verwende Regel von de l'Hospital für ' ∞/∞ ':

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$$

für jedes $\alpha > 0$. Stetige Fortsetzung von rechts mit $f(0) = 0$.

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$ ihren minimalen Wert an genau einer Stelle $x_{min} \in (0, 1)$ annimmt, und geben Sie x_{min} an. [b): 1.25 P.]

Bestimme Nullstelle der Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2 \ln x) &= 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1) = 0 \\ \Rightarrow \ln x &= -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{min} = e^{-1/2} \in (0, 1) \end{aligned}$$

Wegen $f(0) = 0$ (siehe Lösung zu a)), $f(1) = 0$ und $f(x) < 0$ für $x \in (0, 1)$ handelt es sich tatsächlich um eine Minimalstelle. Oder: Überprüfung der zweiten Ableitung:

$$f''(x_{min}) = 2 \ln x_{min} + 3 = 2 > 0. \quad \checkmark$$

- c) Berechnen Sie das **Taylorpolynom vom Grad 2** für die Funktion $f(x)$ aus b) bezüglich der Stelle $x_0 = 1$. [c): 0.75 P.]

Taylor, mit $f'(x)$ und $f''(x)$ wie in b):

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= 0 + 1 \cdot (x - 1) + \frac{3}{2} (x - 1)^2 = \frac{1}{2} - 2x + \frac{3}{2} x^2 \end{aligned}$$

• Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie das Integral $\int x^2 \ln x dx$ ($x > 0$) mittels partieller Integration. [a): 1.25 P.]

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\ln x}_g dx &= \underbrace{\frac{x^3}{3}}_f \underbrace{\ln x}_g - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_f \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \end{aligned}$$

b) Die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ besitzt einen Wendepunkt in $(0, \infty)$. Geben Sie diesen an. [b): 1 P.]

Mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 e^{-x^2}, \\ f''(x) &= 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = 2x(1 - x^2) e^{-x^2} \end{aligned}$$

und $e^{-x^2} > 0$ folgt für den Wendepunkt die Gleichung

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

c) Geben Sie für die Funktion $f(x) = x^n + c$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $c \in \mathbb{R}$) eine auf $[0, 1]$ gültige Lipschitzkonstante an. [c): 0.75 P.]

Aus dem Mittelwertsatz und mit $f'(x) = n x^{n-1}$ folgt für alle $x_1, x_2 \in [0, 1]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \max_{\xi \in [0,1]} |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| = n |x_1 - x_2|$$

somit $L = n$.