Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2019/20

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 10.01.2020) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(t) = \sin(\pi t), \quad t \in [0,1]}$ ist gegeben durch ein Polynom $p(t)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ mit $f(t)$ übereinstimmt.

Geben Sie dieses Polynom an. *a): 1.5 P.]*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(t) \;=\; a + b\,t + c\,t^2 \qquad \text{(Grad 2)}$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; f(0) \;\stackrel{!}{=}\; p(0) \;=\; a \\
1 \;&=\; f(\tfrac{1}{2}) \;\stackrel{!}{=}\; p(\tfrac{1}{2}) \;=\; a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \\
0 \;&=\; f(1) \;\stackrel{!}{=}\; p(1) \;=\; a + b + c
\end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b \quad \Rightarrow \quad b = 4,\; c = -4$$

$\Rightarrow$

$$p(t) \;=\; 4\,t - 4\,t^2 \;=\; 4\,t\,(1-t)$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{g\colon\, [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1], \quad g(t) = \cos t}$ ist gegeben durch $\boxed{q(t) = 1 - 4\,\frac{t^2}{\pi^2}}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von g konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $g^{-1}(u)$ und $q^{-1}(u)$? Bitte präzise begründen! *b): 1.5 P.]*

Ebenso wie $g(t) = \cos t$ ist die Funktion $q(t) = 1 - 4\,\frac{t^2}{\pi^2}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon\, [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(u) \approx g^{-1}(u) = \arccos u$:

Auflösen der Gleichung $q(t) = u$ nach t für $u \in [0,1]$:

$$1 - 4\,\frac{t^2}{\pi^2} \;=\; u \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \;=\; \frac{\pi^2}{4}\,(1-u)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$t \;=\; q^{-1}(u) \;=\; \frac{\pi}{2}\,\sqrt{1-u} \;\approx\; g^{-1}(u)$$

- **Aufgabe 2.**

a) Geben Sie (mittels Differentialrechnung) für die Funktion $\boxed{g(t) = t^k + a \quad (k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})}$ eine auf $[0,1]$ gültige Lipschitzkonstante L an. *[a): 1 P.]*

Aus dem Mittelwertsatz und mit $g'(t) = k\,t^{k-1}$ folgt für alle $t_1, t_2 \in [0,1]$:

$$|g(t_1) - g(t_2)| \;\leq\; \max_{\theta \in [0,1]} |g'(\theta)| \cdot |t_1 - t_2| \;=\; k\,|t_1 - t_2|$$

somit $L = k$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}}$ *[b): 1 P.]*

Dreimalige Anwendung der Regel von de L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{3x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{4\sin(2x)}{6x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{8\cos(2x)}{6} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\boxed{\frac{1}{x^2 + 7x + 12}}$ *[c): 1 P.]*

Ansatz (mit einfachen Nullstellen -3 und -4 des Nenners):

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & & 1 &= A\,(x+4) + B\,(x+3) \\ x = -3: & & 1 &= A\,(-3+4) = A \\ x = -4: & & 1 &= B\,(-4+3) = -B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei g eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von g' und g'' – einen expliziten Formelausdruck an für *[a): 0.75 P.]*

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\, g(\sinh x)}$$

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\frac{d}{dx}\, g(\sinh x) \;=\; g'(\sinh x)\cosh x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, g(\sinh x) \;=\; g''(\sinh x)\cosh^2 x + g'(\sinh x)\sinh x$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\boxed{f(x) = x^{(x^2)} \quad (x > 0)}$ *b): 1 P.]*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\, x^{(x^2)} \;=\; \frac{d}{dx}\, e^{(x^2\,\ln x)} \;=\; e^{(x^2\,\ln x)}\,\frac{d}{dx}\big(x^2\,\ln x\big) \;=\; x^{(x^2)}\big(2\,x\,\ln x + x\big)$$

$$=\; x\, x^{(x^2)}\,\big(2\,\ln x + 1\big) \;=\; x^{(1+x^3)}\,\big(2\,\ln x + 1\big)$$

c) Ist die Funktion $\boxed{f(t) = \sin\big(t^2 \cdot \operatorname{sgn}(t)\big)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?
(Genaue Begründung! Beachten Sie, dass f ‘stückweise’ definiert ist.) *[c): 1.25 P.]*

f dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} \sin(-t^2), & t \le 0 \\ \sin(t^2), & t \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}\text{, da stetig an } t = 0 \text{ mit } f(0) = 0$$

f' dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f'(t) \;=\; \begin{cases} -2\,t\,\cos(t^2), & t \le 0 \\ 2\,t\,\cos(t^2), & t \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}\text{, da stetig an } t = 0 \text{ mit } f'(0) = 0$$

Also: f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(Anmerkung: f'' ist jedoch an der Stelle $t = 0$ nicht mehr stetig .)

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2019/20

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 10.01.2020) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\boxed{f(x) = x^{(x^3)} \quad (x > 0)}$ *[a): 1 P.]*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\, x^{(x^3)} \;=\; \frac{d}{dx}\, e^{(x^3 \,\ln x)} \;=\; e^{(x^3 \,\ln x)}\, \frac{d}{dx}\big(x^3 \,\ln x\big) \;=\; x^{(x^3)}\big(3\,x^2\,\ln x + x^2\big)$$

$$=\; x^2\, x^{(x^3)}\big(3\,\ln x + 1\big) \;=\; x^{(2+x^3)}\big(3\,\ln x + 1\big)$$

b) Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \sin\big(\operatorname{sgn}(x)\cdot x^2\big)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?
(Genaue Begründung! Beachten Sie, dass f 'stückweise' definiert ist.) *[b): 1.25 P.]*

f dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin(-x^2), & x \le 0 \\ \sin(x^2), & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}, \text{ da stetig an } x = 0 \text{ mit } f(0) = 0$$

f' dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} -2\,x\,\cos(x^2), & x \le 0 \\ 2\,x\,\cos(x^2), & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}, \text{ da stetig an } x = 0 \text{ mit } f'(0) = 0$$

Also: f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(Anmerkung: f'' ist jedoch an der Stelle $x = 0$ nicht mehr stetig .)

c) Sei f eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von f' und f'' – einen expliziten Formelausdruck an für *[c): 0.75 P.]*

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\, f(\cosh x)}$$

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\frac{d}{dx}\, f(\cosh x) = f'(\cosh x)\sinh x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f(\cosh x) = f''(\cosh x)\sinh^2 x + f'(\cosh x)\cosh x$$

- **Aufgabe 2.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1], \quad f(x) = \cos x}$ ist gegeben durch $\boxed{q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von f konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $f^{-1}(y)$ und $q^{-1}(y)$? Bitte präzise begründen! *a): 1.5 P.]*

Ebenso wie $f(x) = \cos x$ ist die Funktion $q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(y) \approx f^{-1}(y) = \arccos y$:

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0,1]$:

$$1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2} \;=\; y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \;=\; \frac{\pi^2}{4}\,(1-y)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$x \;=\; q^{-1}(y) \;=\; \frac{\pi}{2}\,\sqrt{1-y} \;\approx\; f^{-1}(y)$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(x) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1]}$ ist gegeben durch ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ mit $f(x)$ übereinstimmt.

Geben Sie dieses Polynom an. *b): 1.5 P.]*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 \qquad (\text{Grad } 2)$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; f(0) \;\overset{!}{=}\; p(0) \;=\; a \\ 1 \;&=\; f(\tfrac{1}{2}) \;\overset{!}{=}\; p(\tfrac{1}{2}) \;=\; a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \\ 0 \;&=\; f(1) \;\overset{!}{=}\; p(1) \;=\; a + b + c \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -b \qquad \Rightarrow \qquad b = 4,\ c = -4$$

$\Rightarrow$

$$p(x) \;=\; 4\,x - 4\,x^2 \;=\; 4\,x\,(1-x)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\boxed{\dfrac{1}{x^2+5\,x+6}}$ *[a): 1 P.]*

Ansatz (mit einfachen Nullstellen -2 und -3 des Nenners):

$$\frac{1}{x^2+5\,x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} && 1 &= A\,(x+3)+B\,(x+2) \\ x=-2: && 1 &= A\,(-2+3) = A \\ x=-3: && 1 &= B\,(-3+2) = -B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2+5\,x+6} = \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

b) Geben Sie (mittels Differentialrechnung) für die Funktion $\boxed{f(x)=x^n+c \quad (n\in\mathbb{N},\ c\in\mathbb{R})}$ eine auf $[0,1]$ gültige Lipschitzkonstante L an. *[b): 1 P.]*

Aus dem Mittelwertsatz und mit $f'(x)=n\,x^{n-1}$ folgt für alle $x_1,x_2\in[0,1]$:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le \max_{\xi\in[0,1]}|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2| = n\,|x_1-x_2|$$

somit $L=n$.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin(3x)}{x^3}}$ *[c): 1 P.]*

Dreimalige Anwendung der Regel von de L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin(3x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos(3x)}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{9\sin(3x)}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{27\cos(3x)}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$