Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

a) [L] Beweisen Sie die Identität (für $\ell \le n$)

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

indem Sie $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich n verwenden.

Zu beachten: Induktionsanfang ist hier $n = \ell$.

b) [L] Behauptung:

Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ ist $(m+1)^n - 1$ ohne Rest durch m teilbar.

Beweisen Sie diese Behauptung

(i) mittels vollständiger Induktion,

(ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

---

a)

- Induktionsanfang $(n = \ell)$: $\binom{\ell}{\ell} = \binom{\ell+1}{\ell+1} = 1$ $\checkmark$
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=\ell}^{n+1} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} + \binom{n+1}{\ell} \overset{\text{IND}}{=} \binom{n+1}{\ell+1} + \binom{n+1}{\ell} = \binom{n+2}{\ell+1} \checkmark$$

(siehe Additionstheorem für Binomialkoeffizienten).

---

b) (i) Induktion über n für beliebiges festes m.

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $(m+1)^1 - 1 = m$ $\checkmark$
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}(m+1)^{n+1} - 1 &= \big((m+1)^{n+1} - (m+1)^n\big) + \big((m+1)^n - 1\big) \\ &= (m+1-1)\,(m+1)^n + \big((m+1)^n - 1\big) \\ &\overset{\text{IND}}{=} m \cdot (m+1)^n + m\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Auch $(m+1)^{n+1} - 1$ ist ohne Rest durch m teilbar. $\checkmark$

$\longrightarrow$

(ii) Mittels geometrischer Summenformel:

$$\frac{(m+1)^n - 1}{m} = \frac{(m+1)^n - 1}{(m+1) - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (m+1)^k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

- Oder alternativ mittels 'Binomi':

$$\begin{aligned}(m+1)^n - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k - 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m^k - 1 \text{ enthält Faktor } m. \checkmark\end{aligned}$$

Das waren drei verschiedene Beweise für b)!

□

a) [L] Schreiben Sie den Ausdruck ($n \in \mathbb{N}$)

$$(x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + y_1\,(x_2 - y_2)\, x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\,(x_n - y_n)$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols ($\sum$, $\prod$) an.

b) [L] Die offensichtliche Identität $x_1\, x_2 - y_1\, y_2 = (x_1 - y_1)\, x_2 + y_1(x_2 - y_2)$ verallgemeinert sich wie folgt ($n \in \mathbb{N}$):

Für $X_n = x_1 \cdots x_n$, $Y_n = y_1 \cdots y_n$ gilt $X_n - Y_n =$ Summe aus **a)**.

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ durch.

---

a)

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} y_j \cdot (x_i - y_i) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} x_j \Big)$$

---

b) Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - Y_{n+1} &= X_n\, x_{n+1} - Y_n\, y_{n+1} \\
&= X_n\, x_{n+1} - Y_n\, x_{n+1} + Y_n\, x_{n+1} - Y_n\, y_{n+1} \\
&= (X_n - Y_n)\, x_{n+1} + Y_n\,(x_{n+1} - y_{n+1}) \\
&\overset{\text{IND}}{=} \big((x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\,(x_n - y_n)\big)x_{n+1} \\
&\quad + y_1 \cdots y_n\,(x_{n+1} - y_{n+1}) \\
&= (x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_{n+1} + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\,(x_n - y_n)\, x_{n+1} \\
&\quad + y_1 \cdots y_n\,(x_{n+1} - y_{n+1}) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Ein häufiger Trick: Einen geeigneten Term addieren und subtrahieren.

Anmerkung: Im Beweis haben wir nirgends die Kommutativität der Multiplikation verwendet. Die Aussage gilt daher allgemeiner auch für Objekte, bei denen die Multiplikation nicht kommutativ ist, wie z.B. quadratische Matrizen $A_i, B_i \in \mathbb{R}^{m\times m}$, mit nichtkommutativer Matrixmultiplikation $AB \neq BA$, siehe 'Lineare Algebra'.

□

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) [L] *Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n, und es gelte $A(1)$. Falls man zeigen kann*

$$\forall n \geq 2 : \quad \exists m \in \{1, 2, \ldots, n-1\} : \quad A(m) \Rightarrow A(n)$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) [L] *Seien $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ drei Aussagen über natürliche Zahlen n, wobei gelte*

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad \neg A(n) \Rightarrow \neg C(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Falls $C(1)$ zutrifft und falls man zeigen kann dass $B(n-1) \Rightarrow C(n)$ für alle $n > 1$, dann gilt $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

---

a) Die Behauptung ist wahr. Beweis indirekt (Kontraposition):

Annahme, die Behauptung ist falsch:

$$\exists\, n \geq 2 : \quad \neg A(n)$$

Laut Voraussetzung muss daher gelten

$$\nexists\, m \in \{1, 2, \ldots, n-1\} : \quad A(m)$$

$\rightsquigarrow$ Widerspruch zum Induktionsanfang $A(1)$. ✓

---

b) Die Behauptung ist wahr. Informeller Beweis:

Laut Voraussetzung gilt

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad C(n) \Rightarrow A(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$B(n-1) \Rightarrow C(n) \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

Daher, startend mit Induktionsvoraussetzung $C(1)$:

$$C(1) \Rightarrow A(1) \Rightarrow B(1) \Rightarrow C(2)$$

$$\Rightarrow A(2) \Rightarrow B(2) \Rightarrow C(3) \quad \ldots \qquad ✓$$

Ein streng formaler Beweis erfolgt indirekt (vgl. **a)**) bzw. mittels Zurückführung auf die Standardvariante der vollständigen Induktion.

□

a) [L] Schreiben Sie die geometrische Summe $\sum_{k=0}^{n} x^k$ in die Form $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\,(x-1)^\ell$ um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten a_ℓ?

Anmerkung: Hier tritt eine *Doppelsumme* auf, die geeignet umzuordnen ist. Beachten Sie auch Aufgabe **1a)**.

b) [L] Setzen Sie $x = 1 + \varepsilon$, multiplizieren Sie x^{n+1} aus und vereinfachen Sie die geometrische Summenformel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

(Darstellung als Polynom in ε). Was passiert für $\varepsilon = 0$ (d.h. $x = 1$)? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

---

a) 'Binomi' $\rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (x-1+1)^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell}(x-1)^\ell$$

Doppelsumme umordnen (beachte Notation):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} = \sum_{k,\ell\le n:\ \ell\le k} = \sum_{\ell,k\le n:\ k\ge\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{\ell=0}^{n}\left(\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{\ell}\right)(x-1)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\,(x-1)^\ell$$

mit

$$a_\ell = \binom{n+1}{\ell+1}$$

---

b) 'Binomi' für $x = 1+\varepsilon$ $\rightsquigarrow$

$$x^{n+1} - 1 = (1+\varepsilon)^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\varepsilon^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\varepsilon^k$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n}(1+\varepsilon)^k = \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}-1}{(1+\varepsilon)-1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\varepsilon^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\varepsilon^k$$

… Polynom in ε, mit Wert $n+1$ für $\varepsilon = 0$.

Beachte: **a)**, **b)** sind eng verwandte Fragestellungen.

□

Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe $\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (n \in \mathbb{N})$ kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Eine *konstruktive* Methode zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

a) [L] Betrachten Sie den Formelausdruck $F(k) = a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + d$ und bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so dass $F(k+1) - F(k) = k^2$ für beliebige k gilt. *What about d ?*

Anmerkung: $F(k)$ nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen $f(k) = k^2$.[1]

b) [L] Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big)$

c) [L] Funktioniert diese Methode auch zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} k^p \quad (p \in \mathbb{N}$ beliebig) ? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das 'Muster' erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

d) [L] Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge $f(k) = x^k$ $(k \in N)$? (Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.)

---

a) Ansatz $F(k) = a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + d \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&F(k+1) - F(k) \\
&= \big(a\,(k+1)^3 + b\,(k+1)^2 + c\,(k+1) + \cancel{d}\big) \\
&\qquad - \big(a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + \cancel{d}\big) \\
&= a\,\big((k+1)^3 - k^3\big) + b\,\big((k+1)^2 - k^2\big) + c\,\big((k+1) - k\big) \\
&= a\,\big(3\,k^2 + 3\,k + 1\big) + b\,\big(2\,k + 1\big) + c\,(1) \\
&= 3\,a\,k^2 + \big(3\,a + 2\,b\big)\,k + \big(a + b + c\big) \stackrel{!}{=} k^2\,(+\,0\cdot k^1 + 0\cdot k^0)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei $k^2,\ k^1,\ k^0 \quad \rightsquigarrow$

$$3\,a = 1\,, \quad 3\,a + 2\,b = 0\,, \quad a + b + c = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{3}\,, \qquad b = -\tfrac{1}{2}\,, \qquad c = \tfrac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad F(k) = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + d\,, \quad d \text{ beliebig.}$$

$\longrightarrow$

[1] Es besteht eine enge Analogie zur Integralrechnung – vgl. die Begriffe 'unbestimmtes Integral', 'Stammfunktion'.

---

b) $\rightsquigarrow$ Teleskopsumme:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big) = F(n+1) - F(1)$$
$$= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + d - d = \ldots$$
$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2\,n+1)$$

Analog berechnet man die einfachere ‘Gauß’sche Summe’:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1)$$

---

c) Allgemein für $\sum k^p \quad (p \in \mathbb{N})$:

- Ansatz $F(k) = a_{p+1}\,k^{p+1} + a_p\,k^p + \ldots + a_1\,k + a_0$
- Multipliziere $F(k+1) - F(k)$ aus (mittels Binomi), ordne nach Potenzen von k
- Koeffizientenvergleich für $F(k+1) - F(k) \overset{!}{=} k^p$
- $\rightsquigarrow$ gestaffeltes lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a_j :

  Bestimme zunächst a_{p+1}, daraus a_p, usw., zuletzt a_1.
  Die ‘Summationskonstante’ $a_0 = d$ ist beliebig.
- Man kann beweisen, dass dieses Gleichungssystem für jedes $p \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung besitzt (etwas mehr Arbeit).

---

d) Geometrische Folge x^k : $F(k)$ ‘errät’ man aus der geometrischen Summenformel:

Für $F(k) = \dfrac{x^k}{x-1} + d$ gilt $F(k+1) - F(k) = x^k \quad (x \neq 1)$.

Jedoch: Spezialfall $x = 1$: $F(k) = k + d$.

□

a) [L] Seien A und B zwei beliebige Mengen, und für jedes $x \in A$ gelte $x \notin B$, d.h. $\forall\, x \in A: \; x \notin B$.

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ... (oder was auch immer) aus.

b) [L] Unter der Annahme, dass **a)** gilt: Was folgt dann aus $x \in B$?

c) [L] Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus **a)** ?

d) [L] Gleiche Fragen wie unter **a)** – **c)**, mit $\exists$ anstelle von $\forall$.

---

a) 'Kein Element von A ist in B enthalten', d.h. $A \cap B = \emptyset$

---

b) Die Aussage **a)** ist logisch äquivalent zu

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \notin B \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in B \;\Rightarrow\; x \notin A$$

Das ist dieselbe Aussage, mit vertauschten Rollen von A und B.

---

c) Logische Umkehrung:

$$\exists\, x \in A \;:\; x \in B\,,$$

daher $A \cap B \neq \emptyset$.

---

d) $\exists\, x \in A: \; x \notin B$

- Es gibt (mindestens) ein Element in A, das nicht in B enthalten ist, d.h. $A \not\subseteq B$.
- Aus der Aussage folgt für $x \in B$ *nichts* .
- Logische Umkehrung:

$$\forall\, x \in A \;:\; x \in B\,,$$

daher $A \subseteq B$.

□

a) [L] Für zwei Mengen A, B bezeichnet $A \triangle B$ die Menge derjenigen Elemente aus A oder B, die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

- Drücken Sie $A \triangle B$

  (i) in der Form $\ldots \setminus \ldots$, (ii) in der Form $\ldots \cup \ldots$

aus.

b) [L] Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge A versteht man eine Menge aus Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich A ist: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

(Dabei bedeutet 'paarweise disjunkt, dass gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I könnte z.B. endlich sein, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, oder auch unendlich, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$. Zu jedem $i \in I$ gehört genau ein A_i, d.h., die Abbildung $i \mapsto A_i$ definiert die Menge von Mengen – man spricht dabei gerne von einer *Familie* von Mengen).

- Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von $A = \mathbb{N}_0$ an, mit Indexmenge $I = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Stellen Sie die A_i in der Form $\{n \in \mathbb{N}_0 : \ldots\}$ dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der A_i eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist.

---

a) 'Symmetrische Mengendifferenz':

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

---

b) Z.B.:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0,\, k,\, 2\,k,\, 3\,k,\, \ldots\}, \\ A_1 &= \{1,\, k+1,\, 2\,k+1,\, 3\,k+1,\, \ldots\}, \\ &\vdots \\ A_{k-1} &= \{k-1,\, 2\,k-1,\, 3\,k-1,\, 4\,k-1,\, \ldots\}, \end{aligned}$$

Deskriptive Darstellung:

$$A_i = \{n \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{n \bmod k}_{\text{Rest bei Division durch } k} = i\}, \quad i = 0 \ldots k-1$$

Die A_i nennt man ***Restklassen*** mod k.

Algorithmus: Für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ bestimmt man den Index i als Rest bei der Division n/k.

□

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) [L] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\quad f(n) = \dfrac{n-1}{n+1}$

b) [L] $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\quad f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

---

a)

- f ist injektiv:

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1} \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad nm + n - m - 1 = mn + m - n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n - m = m - n \quad \Leftrightarrow \quad n - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = m \end{aligned}$$

Oder: Man argumentiert, dass f strikt monoton wachsend ist, d.h.

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = f(n)$$

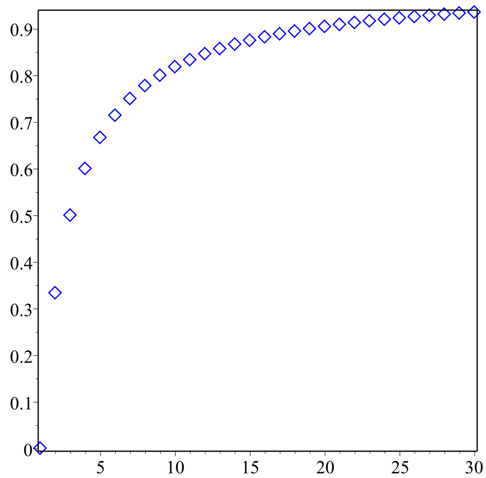
wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} > \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2}\,.$$

Oder ganz direkt:

$$f(n) = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- f ist nicht surjektiv, weil nicht alle $y \in \mathbb{Q}$ als Funktionswert angenommen werden.



⟶

b)

- f nicht surjektiv wegen $f(x) > \max\{x, 1/x\} \geq 1$ für alle $x > 0$
- f nicht injektiv wegen $f(x) = f(1/x)$

Oder Injektivität direkt gemäß Definition nachprüfen:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1\, x_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ x_1\, x_2 = 1, \ \text{d.h. } x_2 = 1/x_1\,.$$

- Alternativ mittels Rechnung: Sei $y > 0$. Die Gleichung $f(x) = y$, d.h.

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x\,y + 1 = 0 \qquad (x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein})$$

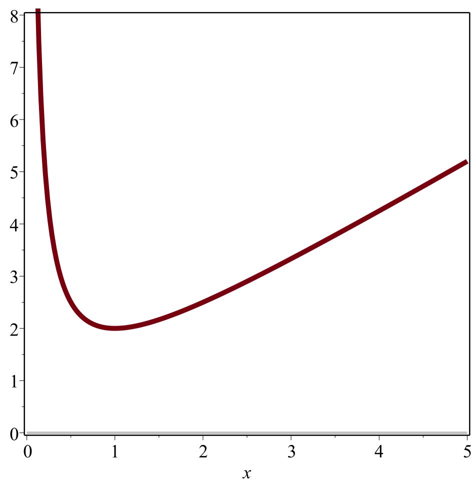
hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}$$

– $y < 2$: keine reelle Lösung $\Rightarrow$ f nicht surjektiv

– $y > 2$: zwei positive Lösungen $x_{1,2}$ $\Rightarrow$ f nicht injektiv

Anmerkung: Es gilt $f(x) \geq 2$ für alle $x > 0$.



□

Seien A, B und C beliebige Mengen und $f\colon A \to B,\ g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) [L] Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

b) [L] Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

c) [L] Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.

---

a) Laut Voraussetzung ($g \circ f$ injektiv) gilt:

$$\text{Sei } a_1, a_2 \in A \text{ mit } (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$$

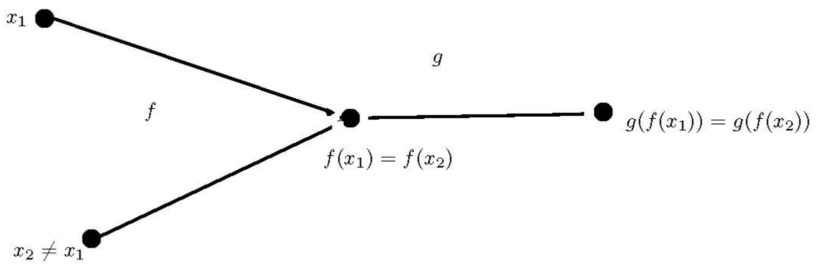
Nun: Nehme an $f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow$

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \checkmark$$

Also ist f injektiv.

- Etwas einfacher umgekehrt gedacht:

$$f \text{ nicht injektiv} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ nicht injektiv (Skizze).}$$



---

b) Laut Voraussetzung ($g \circ f$ surjektiv) gilt:

$$\forall\, c \in C \ \ \exists\, a \in A \text{ mit } (g \circ f)(a) = c, \quad \text{d.h. } g(f(a)) = c$$

$\Rightarrow$

$$\text{Für } b = f(a) \in B \text{ gilt } g(b) = c \quad \checkmark$$

Also ist g surjektiv.

- Auch hier etwas einfacher umgekehrt gedacht:
  Wenn g nicht surjektiv ist, dann kann auch $g \circ f$ nicht surjektiv sein.

c) Direkte Folgerung aus **a)** und **b)**.

$\square$

a) [L] Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine 'Anzahl' von Bakterien.

b) [L] Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien $= B_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für B_n?

Verwenden Sie Ihren elektronischen Rechenapparat.

---

a) Wachstum um 10% in einer Minute bedeutet

$$B_{1\,\text{min.}} = 1.1 \cdot B_{0\,\text{min.}}$$

$\Rightarrow$

nach Ablauf einer Stunde (60 min. zwischen 3:00 und 4:00):

$$B_{4:00} = (1.1)^{60} \cdot B_{3:00} \approx 304.5 \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^{11}$$

und

$$B_{0:00} = (1.1)^{-180} B_{3:00} \approx 3.5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9 \approx 35.4$$

Das sind keine Rechnungen mit natürlichen Zahlen. Das mathematische Modell *schätzt* die Population mittels reeller Größen.

---

b) Annahme: Wachstum ist gleichmäßig über die Zeit $\Rightarrow$

$$B_{1\,[\text{sec}]} = c \cdot B_{0\,[\text{sec}]}$$

mit

$$c^{60} = 1.1\,, \quad \text{d.h.} \quad c = 1.1^{1/60} = \sqrt[60]{1.1} \approx 1.0016$$

Dann gilt

$$B_{n\,[\text{sec}]} = c^n \cdot B_{0\,[\text{sec}]}$$

□