Aufgaben zu Kapitel 2–4

Aufgabe 1: Mächtigkeit von Mengen

Aufgabe 2: Injektivität, Surjektivität und Umkehrabbildung

Aufgabe 3: (∗) Eine lustige reelle Funktion

Aufgabe 4: Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen

Aufgabe 5: Konvergenz von Folgen

Aufgabe 6: (∗) Noch mehr Folgen

Aufgabe 7: (∗) Rekursiv definierte Folgen (lineare Rekursion)

Aufgabe 8: (∗) Asymptotisches Verhalten (für $n \to \infty$) der Folgen aus Aufgabe 7

Aufgabe 9: Eine nichtlinear-rekursiv definierte Folge

Aufgabe 10: Wachstum einer Population

**a)** [L] Zeigen Sie; Das Intervall $(0, 1)$ hat dieselbe Mächtigkeit wie ein beliebiges Intervall $(a, b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Hinweis: Finden Sie eine bijektive Abbildung zwischen $(0, 1)$ und $(a, b)$.

Lassen Sie auch $a = 0$, $b = \infty$ als Grenzfall zu. Die naheliegende Bijektion für den Fall $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich jedoch nicht auf diesen Grenzfall übertragen. [1]

**b)** [L] Sei $A$ eine endliche Menge mit $|A| = n$ Elementen. Wieviele Elemente $|P(A)|$ hat die Potenzmenge $P(A)$?

---

**a)** Zu zeigen: $|(0, 1)| = |(a, b)|$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$

(i) Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere die affine Funktion

$$x \mapsto f(x) := a + (b - a)x \quad (\text{mit } f(0) = a,\ f(1) = b)$$

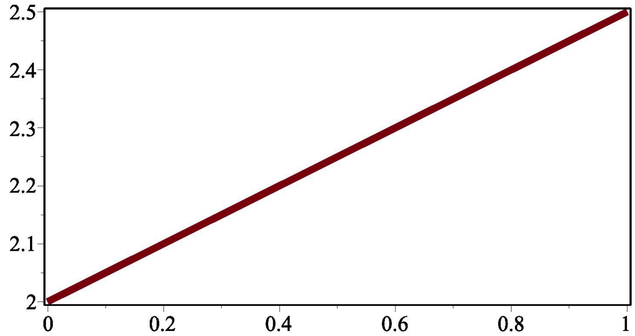
Wir zeigen, dass $f$ bijektiv ist: Sei $y \in (a, b)$. Die Gleichung

$$(f(x) =)\ a + (b - a)x \ = \ y$$

hat die eindeutige Lösung

$$x = \frac{y - a}{b - a} \ \in \ (0, 1)$$

$\Rightarrow \quad f$ ist bijektiv. ✓

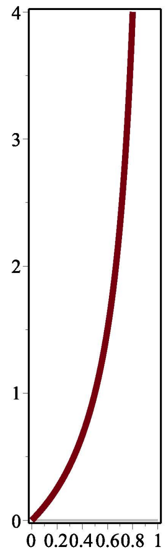



⟶

[1] Ähnlich funktioniert es für $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$ und $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

(ii) Sei $a = 0$, $b = \infty$, $(a, b) = \mathbb{R}$. Wir konstruieren eine bijektive Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und '$f(1) = +\infty$' (im Sinne des Grenzwertes):

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{1-x}$$




Wir zeigen, dass $f$ bijektiv ist: Sei $y \in (0, \infty)$. Die Gleichung

$$(f(x) =)\ \frac{x}{1-x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y(1-x)$$

hat die eindeutige Lösung

$$x = \frac{y}{1+y} \in (0,1)$$

$\Rightarrow$ $f$ ist bijektiv. ✓

---

**b)** Entweder mittels Induktion, oder direkt durch Abzählen:

Mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen wir die Elemente von $A$.

Es gibt genau $2^n$ verschiedene Möglichkeiten, verschiedene Teilmengen $B \subseteq A$ zu basteln: Dabei entscheiden wir für jedes $a_k$, ob es der Teilmenge $B$ angehören soll oder nicht. Daher:

$$|P(A)| = 2^n .$$

Spezielle Teilmengen: $B = \{\}$ (kein Element enthalten); $B = A$ (alle Elemente enthalten).

□

**a)** [L] Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ \ f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ('Harmonische Summen').

(i) *Ist $f$ injektiv?*

(ii) *Ist $f$ surjektiv?*

(iii) Falls Injektivität gegeben ist, dann ist $f$ aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ surjektiv und daher bijektiv, wobei $f(\mathbb{N}) := \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

*Lässt sich das Bild $f(\mathbb{N})$ in einfacher Weise darstellen? Können Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ explizit angeben?*

**b)** [L] Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ \ f(n) = \frac{n-1}{n}$. Analoge Fragen wie unter **a)**.

---

**a)** (i) Injektiv, da die Summe strikt monoton wachsend ist: $f(n+1) > f(n)$ für alle $n$.

(ii) Nicht surjektiv.

(iii) Für eine gegebene rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ist nicht in einfacher Weise feststellbar, ob $q \in f(\mathbb{N})$ gilt. Man kann eigentlich nur probieren, indem man ein passendes $n$ sucht.

*Anmerkung:* Mit analytischen Hilfsmitteln geht es etwas einfacher. Es gilt nämlich $f(n) \approx \ln n$ und somit $n \approx e^{f(n)}$. Für gegebenes $q$ wird man daher $n$ 'in der Nähe von $e^q$' suchen. Man benötigt jedoch immer noch die Auswertung der Harmonischen Summe, für die es *keinen* einfachen Formelausdruck gibt.

---

**b)** (i) Injektiv, da $f(n) = 1 - \frac{1}{n}$ strikt monoton wachsend ist.

(ii) Nicht surjektiv.

(iii) Sei eine rationale Zahl $q$ zwischen 0 und 1 gegeben. Dann gilt $q = f(n) = 1 - \frac{1}{n}$, falls $1 - q = \frac{1}{n}$. Falls dies für ein $n \in \mathbb{N}$ zutrifft, gilt

$$n = f^{-1}(q) = \frac{1}{1-q}.$$

□

Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$

Dabei bedeutet $\sqrt{x}$ wie üblich die positive Wurzel aus $x \geq 0$.

**a)** [L] Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f$.

**b)** [L] Geben Sie $y \geq 0$ vor und lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach $x$ auf. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**c)** [L] Überprüfen Sie nochmals Ihr Ergebnis [1] aus **b)** und überlegen Sie, für welche Werte von $y$ der betreffende Wert von $x$ überhaupt wohldefiniert ist (als reelle Zahl). Was folgern Sie daraus?

---

**a)** Alle Wurzelausdrücke müssen wohldefiniert ($\checkmark$) sein, d.h., ihre Argumente müssen $\geq 0$ sein:

$$\sqrt{3-x} \ \checkmark \ \text{ für } \ x \leq 3, \quad \text{mit } \ y := \sqrt{3-x} \geq 0$$

$$\sqrt{2-y} \ \checkmark \ \text{ für } \ y \leq 2, \quad \text{mit } \ z := \sqrt{2-y} \geq 0$$

$$\sqrt{1-z} \ \checkmark \ \text{ für } \ z \leq 1, \quad \text{mit } \ f(x) = \sqrt{1-z} \geq 0$$

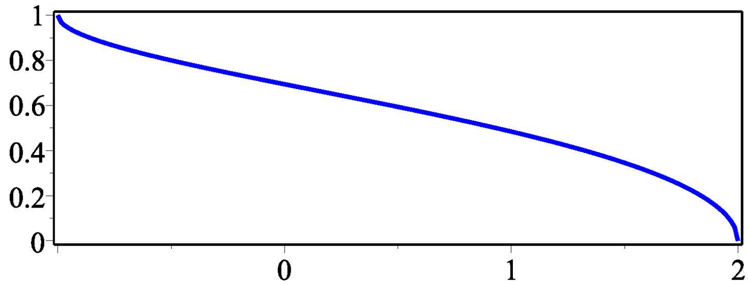
$\Rightarrow$ $x \in D(f)$ erfordert
$x \leq 3$,

*und:* $\sqrt{3-x} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$

*und:* $\sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \sqrt{3-x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3-x} \geq 1$
$\Leftrightarrow \quad 3 - x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq x \leq 2\,, \quad \text{daher} \quad D(f) = [-1, 2]\,.$$




$\longrightarrow$

[1] Falls Sie unter **b)** bereits sorgfältig und korrekt vorgegangen sind, haben Sie **c)** bereits vorweggenommen.

**b)** Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ nach $x$ mittels mehrfachen Quadrierens und Umformens:

$$\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}} = y \geq 0$$

$$1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2-\sqrt{3-x}} = 1-y^2$$

$$2-\sqrt{3-x} = \left(1-y^2\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3-x} = 2-\left(1-y^2\right)^2$$

$$3-x = \left(2-\left(1-y^2\right)^2\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3-\left(2-\left(1-y^2\right)^2\right)^2$$

---

**c)** Rechnung in **b)**: Alle Wurzelausdrücke müssen $\geq 0$ sein:

$$y \geq 0$$

*und:* $1-y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 1$

*und:* $2-\left(1-y^2\right)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1-y^2\right)^2 \leq 2$

Also: $y \in [0,1]$, und dann ist die dritte Forderung automatisch erfüllt.

$\rightsquigarrow$

- $\forall\, y \in [0,1]$ ist die Gleichung $f(x) = y$ eindeutig nach $x$ auflösbar.
- $f\colon [-1,2] \to [0,1]$ ist bijektiv, mit $f^{-1}$ gemäß **b)**.

□

**a)** [L] Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$$0.0740740740740740740740\ldots$$

in rationale Darstellung um.

**b)** [L] Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{10}{33}$ an.

---

**a)** Mittels geometrischer Summe:

Achte auf Periodenlänge (hier: 3 ohne 'Vorlauf')

$$0.0740740740740740740740\ldots = 0.\overline{074}$$

$$= 0.0 + 0.0740 + 0.000740 + \ldots$$

$$= 0.074 \cdot \left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \ldots\right) = \frac{74}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}}$$

$$= \frac{74}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{74}{999} = \frac{2 \cdot 37}{27 \cdot 37} = \frac{2}{27}$$

---

**b)** Ganzzahlige Division mit Rest; Periode diagnostizieren:

$$\begin{array}{lcl} 10 & / & 33 = 0.303\ldots \\ 100 & & \\ -\ 99 & & \\ \hline \quad 10 & & \\ \quad 100 & & \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{10}{33} = 0.303030\ldots = 0.\overline{30}$$

Welche Folgen $(a_n)$ konvergieren? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz ihren Grenzwert.

**a)** [L] $a_n = \dfrac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3}$

**b)** [L] $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n - 1}$

**c)** [L] $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}$

**d)** [L] $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k}$

**e)** [L] $a_n = \dfrac{2 + n}{2 + n\,(-1)^n}$

**f)** [L] $a_n =$ Produkt der Folgenelemente aus **d)** und **e)**

---

Verwende Rechenregeln für konvergente Folgen, Einschließungsprinzip, etc.

**a)** Offenbar gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -5$. Genauer:

$$\frac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3} = \frac{\frac{1}{n^4} - 5}{1 + \frac{8}{n}} \to -5 \qquad \checkmark$$

---

**b)** $(a_n)$ ist eine Nullfolge, da $(|a_n|)$ eine Nullfolge ist.

Bzw.: $(-|a_n|)$ und $(|a_n|)$ sind Nullfolgen – Einschließungsprinzip.

---

**c)** In den $a_n$ steckt eine geometrische Summe:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{-n}\,\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2 - 2^{-n}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

$\longrightarrow$

Alternative Variante:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \quad \text{usw.}$$

---

**d)** 'Binomi':

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot 1^{n-k} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

---

**e)** Die Folge $(a_n)$, mit

$$a_n = \frac{2+n}{2+n\,(-1)^n} = \frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{2}{n}+(-1)^n}$$

ist oszillatorisch und hat die zwei Häufungspunkte 1 und $-1$.

Divergent.

---

**f)** $a_n =$ Produkt der Folgenelemente aus **d)** und **e)**

- Folge aus **d)** ist Nullfolge
- Folge aus **e)** ist divergent, jedoch beschränkt
  (2 endliche Häufungspunkte!)

Einschließungsprinzip $\Rightarrow$ $(a_n)$ ist Nullfolge.

□

**a)** [L] (∗) Zeigen Sie:

*Für $|q| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_n)$ mit $a_n = n^p\, q^n$ eine Nullfolge.*

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $(|a_n|)$ für hinreichend große $n$ strikt monoton fallend ist. Zur Bestimmung des Grenzwertes nützt man aus, dass gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

**b)** [L] Zeichnen Sie den Verlauf der Folgen aus **a)** für $p = 1, 2, 3, \ldots$

**c)** [L] (∗) Die beiden Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ seien definiert als die Lösungspaare $x$ der von $n$ abhängigen quadratischen Gleichung

$$x^2 - n\,x + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Studieren Sie die Konvergenz dieser Folgen sowie die Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n\, b_n)$.

---

**a)** • $\big(n^p\,|q|^n\big)$ ist strikt monoton fallend für hinreichend große $n$:

$$(n+1)^p\,|q|^{n+1} = \frac{(n+1)^p}{n^p}\,|q|\,(n^p\,|q|^n) = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p|q|\,(n^p\,|q|^n)$$

mit

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p|q| < 1 \quad \text{für} \quad n > \frac{\sqrt[p]{|q|}}{1-\sqrt[p]{|q|}} \qquad \text{O.K.}$$

Die Folge ist nach unten durch 0 beschränkt und daher konvergent.

• Behauptung: $a := \lim\limits_{n\to\infty} n^p\,|q|^n = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^p\,|q|^{n+1} = 0$

Beweis: Rechenregeln für konvergente Folgen $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} (n+1)^p\,|q|^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p|q|\,(n^p\,|q|^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p|q| \cdot \lim_{n\to\infty} n^p\,|q|^n \\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p|q|}_{=\,|q|} \cdot\, a \end{aligned}$$

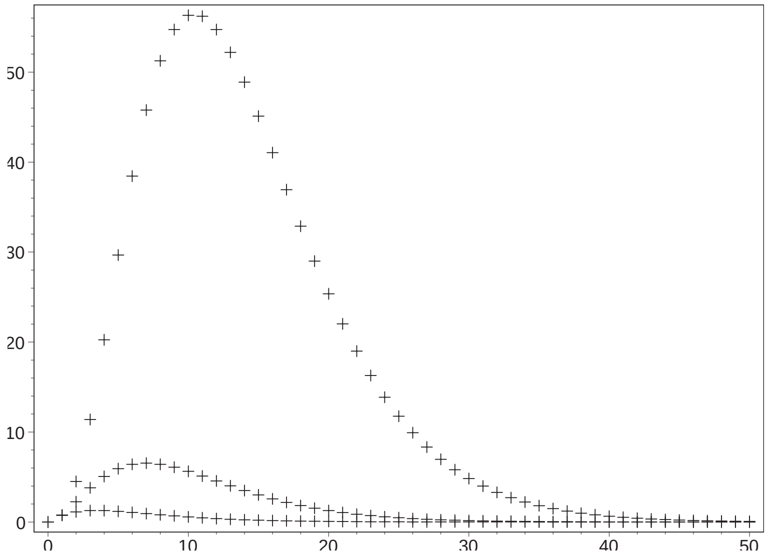
Daher (beachte das Argument!)

$$a = |q|\,a \quad \text{mit} \quad |q| < 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0\,.$$

Folgerung: Mit $\big(n^p\,|q|^n\big)$ ist auch $\big(-n^p\,|q|^n\big)$ eine Nullfolge, und daher auch $\big(n^p\,q^n\big)$ (Einschließungsprinzip).

⟶

**b)**




$q = 0.75$: Verlauf der Folgen für $p = 1, 2, 3$

---

**c)** Lösungen der quadratischen Gleichung $n^2 - n\,x + 1 = 0$:

$$a_n = \frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}\right), \qquad b_n = \frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}\right)$$

mit $\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}} \to 1$ für $n \to \infty$. Daraus folgt:

- $(a_n)$ ist divergent,
- $(b_n)$ ist Nullfolge – dies erkennt man aus $1 - \sqrt{x} = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$:

$$\frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}\right) = \frac{n}{2}\,\frac{1 - \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}}$$

$$= \frac{n}{2}\,\frac{\frac{4}{n^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}} < \frac{2}{n} \to 0 \quad \checkmark$$

- $(a_n + b_n) = (n)$ ist divergent,
- $(a_n\, b_n) \equiv 1$ ist konstant.

□

**a)** [L] Die Folge $(a_n)$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \lambda\, a_n + \mu\, a_{n-1}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,.$$

Finden Sie alle Lösungen der Gestalt $a_n = \xi^n$ (die möglichen Werte von $\xi$ sind zu bestimmen) und daraus eine allgemeine Schar von Lösungen.[1]

(Achtung Sonderfall – siehe **d)**.)

**b)** [L] Nun seien zwei Anfangswerte $a_1, a_2$ vorgegeben. Wie lauten die Glieder $a_n$ der Folge in Anhängigkeit von $a_1$ and $a_2$?

**c)** [L] Sei nun $(a_n)$ die *Fibonacci-Folge* $(\lambda = \mu = 1)$ mit Anfangswerten $a_1 = a_2 = 1$. Wie lauten die $a_n$ ?

**d)** [L] Sonderfall aus **a)**: Was ist hier anders?

Anmerkung: Wir betrachten hier nur den Fall, dass sich für $\xi$ reelle Werte ergeben. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ergeben sich komplexe Werte? (Dieser Fall erfordert komplexe Arithmetik; darauf gehen wir hier nicht genauer ein.)

---

**a)** Ansatz $a_n = \xi^n$ und anschließende Division durch $\xi^{n-1}$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \xi^{n+1} &= \lambda\, \xi^n + \mu\, \xi^{n-1} \\ \xi^2 &= \lambda\, \xi + \mu \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \xi^2 - \lambda\, \xi - \mu \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind reell für $\frac{\lambda^2}{4} + \mu \geq 0$:

$$\xi_1 = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \mu}\,, \qquad \xi_2 = \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \mu}$$

$\Rightarrow$ $a_n = \xi_1^n$ und $a_n = \xi_2^n$ sind mögliche Lösungen. Für jede Linearkombination $a_n = c_1\, \xi_1^n + c_2\, \xi_2^n$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ gilt dann ebenso

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_1\, \xi_1^{n+1} + c_2\, \xi_2^{n+1} \\ &= c_1\big(\lambda\, \xi_1^n + \mu\, \xi_1^{n-1}\big) + c_2\big(\lambda\, \xi_2^n + \mu\, \xi_2^{n-1}\big) \\ &= \lambda\big(c_1\, \xi_1^n + c_2\, \xi_2^n\big) + \mu\big(c_1\, \xi_1^{n-1} + c_2\, \xi_2^{n-1}\big) = \lambda\, a_n + \mu\, a_{n-1} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass, für $\xi_1 \neq \xi_2$,

$$a_n = c_1\, \xi_1^n + c_2\, \xi_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

tatsächlich die allgemeine Lösung ist – zweiparametrige Schar. $\longrightarrow$

[1] Vgl. den einfacheren Fall $a_{n+1} = \lambda\, a_n$: Hier lautet die allgemeine Lösung $a_n = c\,\lambda^n$, $c$ beliebig.

- Sonderfall (Grenzfall) $\xi = \xi_1 = \xi_2 = \frac{\lambda}{2}$ (für $\frac{\lambda^2}{4} + \mu = 0$):

Man erhält 'nur' die Lösung $a_n = c\,\xi^n$. Siehe **d)**.

---

**b)** Seien $a_1, a_2$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_1\,\xi_1 + c_2\,\xi_2 &= a_1 \\ c_1\,\xi_1^2 + c_2\,\xi_2^2 &= a_2 \end{aligned}$$

... zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der Parameter $c_1, c_2$.

Lösung:

$$c_1 = -\frac{a_1\,\xi_2 - a_2}{(\xi_1 - \xi_2)\,\xi_1}, \quad c_2 = \frac{a_1\,\xi_1 - a_2}{(\xi_1 - \xi_2)\,\xi_2}$$

... erfordert $\xi_1 \neq \xi_2$.

---

**c)** Speziell für $\lambda = \mu = 1$:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1^2}{4} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1^2}{4} + 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Damit gilt:

$$a_n = \frac{\xi_1^n - \xi_2^n}{\sqrt{5}}$$

Anmerkung: Hier ist a priori klar, dass $a_n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies ist aus obiger Darstellung nicht unmittelbar ablesbar, ergibt sich jedoch mit Hilfe von 'Binomi' für $\xi_1^n - \xi_2^n$.

Die Fibonacci-Folge steigt sehr schnell an:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots$$

---

**d)** Für den Sonderfall $\xi_1 = \xi_2 = \xi = \frac{\lambda}{2}$ lautet die allgemeine Lösung

$$a_n = c\,\xi^n + d\,n\,\xi^{n-1}, \quad c, d \in \mathbb{R}\,.$$

... hier ohne Herleitung angegeben, aber leicht nachzuprüfen. □

Betrachten Sie nochmals Folgen gemäß Aufgabe 7, mit den dort bestimmten Parametern $\xi_1$ und $\xi_2$. Wir studieren das asymptotische Verhalten dieser Folgen für $n \to \infty$.

**a)** [L] Für welche Werte von $\xi_1$ und $\xi_2$

(i) ist jede mögliche Lösung $(a_n)$ eine Nullfolge?

(ii) ist jede mögliche Lösung $(a_n)$ beschränkt?

(iii) ist jede mögliche Lösung $(a_n)$ divergent? [1]

**b)** [L] Gibt es Fälle, in denen – in Abhängigkeit von den vorgegebenen Anfangswerten $a_1, a_2$ – die Lösung entweder gegen 0 konvergiert oder aber divergiert?

Was passiert hier, wenn die Anfangswerte $a_1, a_2$ kleinen Störungen unterliegen?

Anmerkung: Hier ist nichts zu rechnen – es handelt sich um rein qualitative asymptotische Überlegungen.

Der in Aufgabe 7 erwähnte Sonderfall wird in der Übung separat diskutiert.

---

**a)** Allgemeine Lösung für $\xi_1 \neq \xi_2$:

$$a_n = c_1 \xi_1^n + c_2 \xi_2^n, \quad c_1, c_2 \text{ beliebig, bzw. durch } a_1, a_2 \text{ festgelegt}$$

(i) Für $|\xi_1| < 1$ und $|\xi_2| < 1$ ist $(a_n)$ immer eine Nullfolge.

(ii) Für $|\xi_1| \leq 1$ und $|\xi_2| \leq 1$ ist $(a_n)$ immer beschränkt.

(iii) Für $|\xi_1| > 1$ und $|\xi_2| > 1$ ist $(a_n)$ immer divergent (es sei denn, $a_1 = a_2 = 0$).

---

**b)** Beipiel: $|\xi_1| > 1$ und $|\xi_2| < 1$. Dann gilt

(i) $(a_n)$ divergent für Anfangswerte $a_1, a_2$ so dass $c_1 \neq 0$,

(ii) $a_n \to 0$ für Anfangswerte $a_1, a_2$ so dass $c_1 = 0$.

*Jedoch:*

Annahme: Beliebig kleine (!) Störung der Anfangswerte $a_1, a_2$ so dass $c_1 \neq 0$: Dann divergiert die Folge $(a_n)$ auch im Fall (ii).

Man kann sagen: Die Konvergenz gegen 0 im Fall (ii) ist nicht robust.

$\longrightarrow$

[1] Abgesehen von dem Fall, dass $a_1 = a_2 = 0$ gilt – dann ist immer $a_n \equiv 0$.

- Sonderfall $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, mit allgemeiner Lösung

$$a_n \;=\; c\,\xi^n + d\,n\,\xi^{n-1}$$

Hier: Der Lösungsanteil $n\,\xi^{n-1}$ zeigt ein etwas anderes Verhalten:

— Nullfolge, falls $|\xi| < 1$,

— divergent, falls $|\xi| \geq 1$.

□

**a)** [L] Die Folge $(a_n)$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit einem gegebenen Startwert $a_1 \geq 0$.

Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert der Folge infrage kommen.

**b)** [L] Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit von dem Startwert $a_1 > 0$.

Hinweis: Achten Sie auf das Monotonieverhalten.

---

**a)** Falls $a_n \to a$, dann auch $a_n^2 \to a^2$, wobei für die Folge $(a_n^2)$ gilt

$$a_{n+1}^2 = 4\,a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2$ folgt

$$a^2 = 4\,a \quad \Rightarrow \quad a = 0 \;\text{ oder }\; a = 4$$

Z.B.: konstante Folgen

- $a_1 = 0 \;\Rightarrow\; a_n \equiv 0,\; a = 0$
- $a_1 = 4 \;\Rightarrow\; a_n \equiv 4,\; a = 4$

¿ Was passiert für allgemeine $a_1 > 0$ ?

---

**b)** Das konkrete Verhalten hängt vom Startwert ab.

*Behauptung:* Die Folge $(a_n)$ ist

(i) *strikt monoton* $\uparrow$ *und nach oben beschränkt* für $0 < a_1 < 4$,

(ii) *strikt monoton* $\downarrow$ *und nach unten beschränkt* für $a_1 > 4$.

Beweis: $\longrightarrow$

*Beweis* zu **b)** :

(i) Für $0 < x < 4$ gilt $x^2 < 4\,x$ und $x < 2\,\sqrt{x} < 2\,\sqrt{4} = 4$

Induktionsargument angewendet auf $x = a_n \quad \Rightarrow$

$(a_n)$ strikt monoton $\uparrow$ und nach oben durch 4 beschränkt.

(ii) Für $x > 4$ gilt $x^2 > 4\,x$ und $x > 2\,\sqrt{x} > 2\,\sqrt{4} = 4$

Induktionsargument angewendet auf $x = a_n \quad \Rightarrow$

$(a_n)$ strikt monoton $\downarrow$ und nach unten durch 4 beschränkt.

*Folgerung:*

Für alle $a_1 > 0$ ist $(a_n)$ konvergent, mit (siehe **a)**)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a = 4\,.$$

$\square$

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

mit $p > 0$ und $q > 0$.

Interpretation: Zu- ($p > 1$) oder Abnahme ($p < 1$) einer Population $a_n$ um einen Faktor $p$ von Schritt zu Schritt, zusätzlich Zuwachs durch Migration in jedem Schritt.

**a)** [L] Geben Sie eine explizite Formel in Form einer Summe für die $a_n$ an.

**b)** [L] Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n$

- unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus **a)**,
- ohne Verwendung von **a)**,

für diejenigen Werte von $p$, für die dieser Limes existiert.

Hinweis: Man rechnet einige Werte aus und kann so die allgemeine Gestalt der Lösung vermuten. Dann verifiziert man, dass die vermutete Lösung tatsächlich der gegebenen Rekursion genügt.

---

**a)** Rechnen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q \\
a_1 &= p\, a_0 + q = p\, q + q \\
a_2 &= p\, a_1 + q = p\,(p\, a_0 + q) + q \\
&= p^2\, q + p\, q + q \\
a_3 &= p\, a_2 + q = p\,(p^2\, q + p\, q + q) + q \\
&= p^3\, q + p^2\, q + p\, q + q \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Offenbar gilt allgemein:

$$a_n = q \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} = q \sum_{\ell=0}^{n} p^{\ell} = \begin{cases} q\,\dfrac{1 - p^{\,n+1}}{1-p}, & p \neq 1, \\ q\,(n+1), & p = 1. \end{cases}$$

Formal sauberer Beweis mittels vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang $n = 0$: $a_0 = a_0$ ✓

⟶

- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = p\,a_n + q \stackrel{\text{ind}}{=} p\,q\sum_{\ell=0}^{n} p^{\ell} + q = q\left(1 + \sum_{\ell=0}^{n} p^{\ell+1}\right) = q\left(1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} p^{\ell}\right) = q\sum_{\ell=0}^{n+1} p^{\ell} \quad \checkmark$$

**b)**

- Der Limes $a_\infty$ existiert für $p \in [0,1)$, mit

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{q}{1-p}$$

Der Wert von $a_\infty$ folgt auch aus der Fixpunktgleichung

$$a_\infty = p\,a_\infty + q\,.$$

(Beachte: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$.)

- Für $p \geq 1$ gilt $a_n \to \infty$.