

Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

- [Aufgabe 1:](#) Untersuchung von Reihen mittels Konvergenzkriterien
- [Aufgabe 2:](#) (*) Konvergenz von Reihen ähnlich zu geometrischen Reihen
- [Aufgabe 3:](#) Wachstum einer Population bei variierender Migration
- [Aufgabe 4:](#) (*) Konvergenz einer von zwei Parametern abhängigen Reihe
- [Aufgabe 5:](#) Eine faule Reihe und eine lustige Reihe
- [Aufgabe 6:](#) Beispiele für Prüfungsfragen zum Thema Reihenkonvergenz
- [Aufgabe 7:](#) (*) Bello, das Krabbelmonster
- [Aufgabe 8:](#) Modulation von Funktionen
- [Aufgabe 9:](#) (*) Stetige Fortsetzbarkeit
- [Aufgabe 10:](#) Parameterabhängige Funktionen (Funktionsfolge)

- a) [L] Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- b) [L] Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$ absolut konvergent?
- c) [L] Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{x}{n}\right)^n$ absolut konvergent?
- d) [L] Untersuchen Sie die bedingte und die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}}$$

a) Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} &= \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2(n+1))!} = \frac{(n+1)! (n+1)! (2n)!}{n! n! (2n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

\Rightarrow Reihe konvergent.

b) Quotientenkriterium (für $x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{|x|^{n+1} \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{|x|^n \frac{n^{n-1}}{n!}} &= |x| \frac{(n+1)^n n!}{n^{n-1} (n+1)!} = |x| \frac{(n+1)^{n-1} \cancel{(n+1)!}}{n^{n-1} \cancel{(n+1)!}} \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = |x| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x| e, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

\Rightarrow Reihe absolut konvergent für $|x| < 1/e$, divergent für $|x| > 1/e$.

\longrightarrow

c) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left|x + \frac{x}{n}\right|^n} = |x| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1, n \rightarrow \infty}$$

\Rightarrow Reihe absolut konvergent für $|x| < 1$, divergent für $|x| > 1$.

Grenzfall $x = \pm 1$: divergent; Reihenglieder bilden keine Nullfolge.

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}}$$

- Absolute Konvergenz: nein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ist divergente Minorante.}$$

- Bedingte Konvergenz: Verwende Leibniz-Kriterium:

$$a_n := \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^3}} \text{ ist Nullfolge } \checkmark$$

Untersuchung der Monotonie:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &= \frac{\frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^3}}{\frac{n^2 + 1}{n^3}} = \frac{((n+1)^2 + 1) n^3}{(n^2 + 1) (n+1)^3} \\ &= \frac{n^5 + 2n^4 + 2n^3}{n^5 + 3n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 3n + 1} < 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow (a_n^2)$ und somit auch (a_n) ist monoton fallende Nullfolge

\Rightarrow Die Reihe ist (bedingt) konvergent.

- a) [L] Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, wobei $0 \leq a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kann man daraus schließen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert?

Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- b) [L] Geben Sie – im Vergleich zu a) – eine stärkere Bedingung an die a_n an, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert.

- c) [L] Für welche $\xi > 0$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ konvergent?

(Anmerkung: Der Wert dieser Reihe lässt sich nicht exakt berechnen.)

- d) [L] (*) Zeigen Sie, dass für $\xi = \frac{1}{2}$ der Wert der Reihe aus c) kleiner als 3 ist.

- a) **Nein.** Keines der Kriterien für (absolute) Konvergenz ist hier anwendbar. Wir verfügen über zu wenig Information über die Reihe.

Insbesondere kann man nicht einmal schließen, dass (a_n^n) eine Nullfolge ist (notwendige Bedingung für Konvergenz der Reihe!)

Beispiel:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

mit $a_n^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1/e$ für $n \rightarrow \infty$: keine Nullfolge.

- b) Wir fordern:

$$0 \leq a_n \leq c < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Dann ist die geometrische Reihe $\sum_n c^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$.

Es genügt, $a_n \leq c < 1$ für hinreichend große $n \geq N$ zu fordern – **Wurzelkriterium**. Das Verhalten einer endlichen Teilsumme hat keinen Einfluss auf die Konvergenz der Reihe. \longrightarrow

c) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left(\xi + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Für $\xi > 1$ ist die Reihe divergent.
- Für $\xi = 1$: ebenfalls divergent, wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$.
- Für $\xi < 1$ ist die Reihe **konvergent**, da

$$\xi + \frac{1}{n} \leq q < 1 \quad \text{für hinreichend große } n,$$

und daher (Einschließungsprinzip)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

d) Eine obere Schranke für den Wert der Reihe anzugeben erfordert etwas Rechenarbeit. Wir betrachten den Fall $\xi = \frac{1}{2}$. Es gilt

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^3 = q = \left(\frac{5}{6}\right)^3 < 1 \quad \text{für } n \geq N = 3$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &\leq \left(\frac{1}{2} + 1\right)^{1^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} q^n \\ &= \frac{3}{2} + 1 + \frac{q^3}{1-q} = \frac{5}{2} + \frac{1953125}{4245696} \approx 2.96 \end{aligned}$$

Die Schranke 2.96 lässt sich verbessern: So gilt etwa

$$a_n \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^4 = q \approx \left(\frac{3}{4}\right)^4 < \quad \text{für } n \geq N = 4,$$

und man erhält in analoger Weise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^{1^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{3^2} + \sum_{n=4}^{\infty} q^n = \dots \approx 2.71$$

Usw. mit $N = 5, 6, \dots$; mittels Rechnerunterstützung sieht man, dass sich das sehr rasch knapp unter 2.704 'einpendelt'.

□

Sei $0 \leq p < 1$. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge (a_n) mit

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p a_{n-1} + q_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit einer gegebenen Folge (q_n) .

- a) [L] Geben Sie Darstellung der a_n in Form einer Summe an.
- b) [L] Sei $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \rightarrow \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge (q_n) an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- c) [L] (*) Die Frage der Konvergenz der Folge (a_n) lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie:

Die Population a_n stirbt aus für $n \rightarrow \infty$. (Beachte: $p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

a) Zunächst rechnen:

$$a_0 = 1 \cdot q_0$$

$$a_1 = p a_0 + q_1 = p q_0 + q_1$$

$$a_2 = p a_1 + q_2 = p(p q_0 + q_1) + q_2 = p^2 q_0 + p q_1 + q_2$$

usw. Offenbar gilt:

$$a_n = \sum_{k=0}^n p^{n-k} q_k$$

Beweis mittels vollständiger Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = p a_n + q_{n+1} \stackrel{\text{ind}}{=} p \sum_{k=0}^n p^{n-k} q_k + q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} p^{n+1-k} q_k \quad \checkmark$$

b) Nach oben abschätzen:

$$a_n = \sum_{k=0}^n p^{n-k} q_k \leq \sum_{k=0}^n p^{n-k} \cdot \bar{q}_n, \quad \text{mit } \bar{q}_n = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} q_k$$

Falls (q_k) beschränkt ist, d.h. $\bar{q} := \sup_{k \in \mathbb{N}} q_k < \infty$, folgt für $0 \leq p < 1$:

$$a_n \leq A := \frac{\bar{q}}{1-p} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$



c) Für $q_n = 2^{-n}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n p^{n-k} 2^{-k} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n p^{n-k} 2^{n-k} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n (2p)^k \\ &= 2^{-n} \cdot \frac{1 - (2p)^{n+1}}{1 - 2p} \\ &= \frac{2^{-n} - 2p^{n+1}}{1 - 2p} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

für $0 \leq p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$.

• Sonderfall $p = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n p^{n-k} 2^{-k} = \sum_{k=0}^n 2^{k-n} 2^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n 2^{-n} = (n+1) 2^{-n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe¹

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \right)$$

konvergent?

Summanden auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} = \frac{a(n+a) - b(n-b)}{(n+a)(n-b)} = \frac{(a-b)n + a^2 + b^2}{(n+a)(n-b)}$$

\Rightarrow

$$\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} = (a-b) \underbrace{\frac{n}{(n+a)(n-b)}}_{(i)} + (a^2 + b^2) \underbrace{\frac{1}{(n+a)(n-b)}}_{(ii)}$$

• ad (i):

$$\frac{n}{(n+a)(n-b)} \sim \frac{1}{n} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (\text{'asymptotisch gleich'})$$

Genauer:

$$\frac{n}{(n+a)(n-b)} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{b}{n}}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{1}{n} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\sum_n c/n$ (mit geeignetem c) ist divergente Minorante.

• ad (ii):

$$\frac{1}{(n+a)(n-b)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Genauer:

$$\frac{1}{(n+a)(n-b)} = \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{b}{n}}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\sum_n c/n^2$ (mit geeignetem c) ist konvergente Majorante.

\Rightarrow Reihe konvergent $\Leftrightarrow a = b$.

□

¹ n_0 hinreichend groß, so dass Summand wohldefiniert (keine Division durch 0, die im Fall $n = b \in \mathbb{N}$ und $n = -a \in \mathbb{N}$ auftreten würde).

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren, und werten Sie einige Partialsummen numerisch am Rechner aus, um das Konvergenzverhalten zu beobachten.

a) [L]
$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Achtung: Die Konvergenz ist sehr langsam.

b) [L]
$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right)}{2k+1}$$

- a) Reihe **bedingt konvergent** nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen, jedoch nicht absolut konvergent (vgl. harmonische Reihe).

Sogenannte *Leibniz-Reihe*: ihre Partialsummen

$$4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

konvergieren sehr langsam, offenbar gegen $\pi = 3.141592653589793 \dots$

n	Wert
50	3.161198613...
100	3.151493401...
150	3.148215098...
200	3.146567747...
250	3.145576702...
300	3.144914904...

... ..

Beweis der Konvergenz gegen π : später (mittels Reihenentwicklung der arctan-Funktion).

- b) Majorantenkriterium: Die Summe zweier geometrischer Reihen,

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5^{2k+1}} + \frac{1}{239^{2k+1}} \right)$$

ist absolut konvergente Majorante. Die Reihe **konvergiert absolut**. \longrightarrow

Die Partialsummen dieser lustigen Reihe,

$$4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right)}{2k+1}$$

konvergieren offenbar sehr schnell gegen π :

n	Wert
1	3.140597029...
2	3.141621029...
3	3.141591772...
4	3.141592682...
5	3.141592653...
..	...

Konvergenz gegen π : Nach *John Machin (1706)*, basierend auf Eigenschaften der arctan-Funktion.



Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob die beiden folgenden Aussagen wahr sind. Um ggf. zu zeigen, dass dies nicht zutrifft, gibt man am besten ein Gegenbeispiel an.

- a) [L] Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
- b) [L] Sei (b_n) eine Nullfolge, und für die Folge (a_n) gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- c) [L] Für die positiven Folge (a_n) und (c_n) gelte $c_n < 1$ und $a_{n+1} \leq c_n a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

a) Wahre Aussage. Beweis:

Reihe konvergent $\Rightarrow (a_n)$ ist Nullfolge

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| < 1 \text{ für } n \geq N$$

$$\Rightarrow a_n^2 < |a_n| \text{ für } n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \text{ ist konvergente Majorante für } \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2.$$

b) Falsche Aussage. Gegenbeispiel:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad a_n = \frac{1}{n} \quad (\text{divergente harmonische Reihe})$$

c) Falsche Aussage. Wir stellen zunächst fest, dass die Ungleichung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < c_n < 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

zu schwach ist, um das Quotientenkriterium erfolgreich anwenden zu können.

Gegenbeispiel:

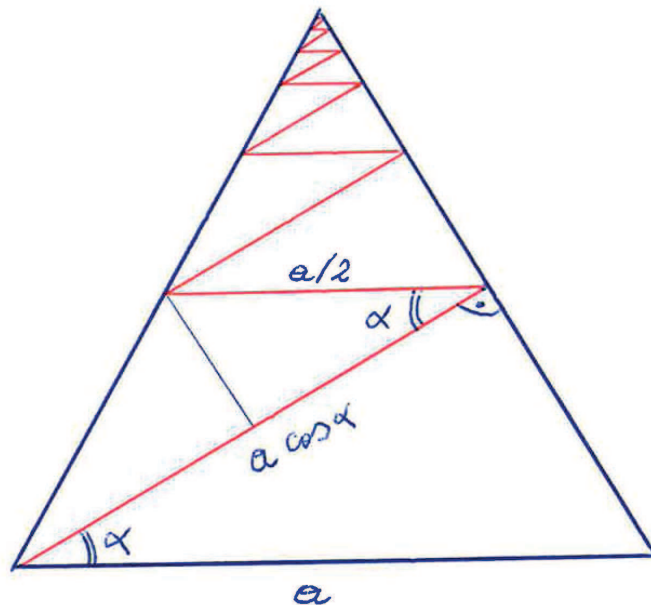
$$c_n = \frac{n}{n+1}, \quad a_n = \frac{1}{n} \quad (\text{divergente harmonische Reihe})$$

□

Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichseitigen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang ‘unendlich oft’, wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n -ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ .

- a) [L] Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?
 b) [L] Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)



$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) 1. Schritt: Wegstrecke $l_1 = a \cos \alpha + a/2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} a$

2. Schritt: Wegstrecke $l_2 = l_1 / 2$

usw.: $l_n = l_1 \cdot 2^{1-n} = (1 + \sqrt{3}) a 2^{-n}$

\Rightarrow Gesamte Wegstrecke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = (1 + \sqrt{3}) a \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = (1 + \sqrt{3}) a \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = (1 + \sqrt{3}) a \text{ [m]}$$

Insbesondere: $l_1 = \sum_{n=2}^{\infty} l_n$

\longrightarrow

b) n -ter Schritt:

$$\begin{aligned} \text{Laufzeit für } n\text{-te Teilstrecke} &= \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) a 2^{-n}}{v/n^p} \\ &= \frac{a}{v} (1 + \sqrt{3}) n^p 2^{-n} \text{ [s]} \end{aligned}$$

Auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p 2^{-n} \quad (\text{verallgemeinerte geometrische Reihe})$$

wenden wir das Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) an:

$$\frac{(n+1)^p 2^{-(n+1)}}{n^p 2^{-n}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

\Rightarrow Das Ziel wird in **endlicher Zeit** erreicht für beliebige $p \in \mathbb{N}$.

Anmerkung:

Für beliebige $|q| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die verallgemeinerte geometrische

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^p q^n$ absolut konvergent (Quotientenkriterium).



Man wähle irgendeine Funktion¹ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und skizziere ihren Graphen. Weiters sei $c > 0$ ein reeller Parameter.

- a) [L] Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x) + c, \quad f(x) - c, \quad cf(x), \quad -cf(x).$$

- b) [L] Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

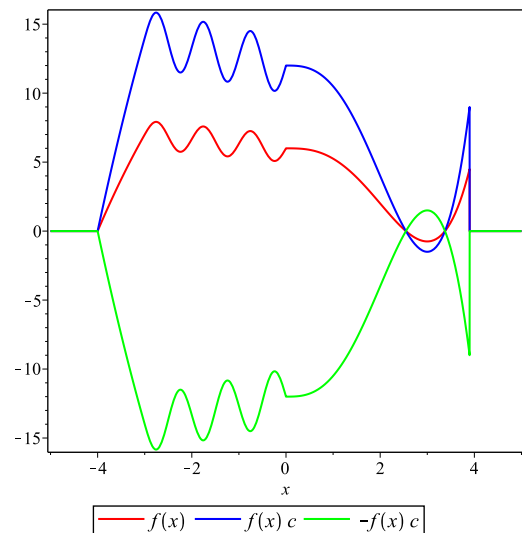
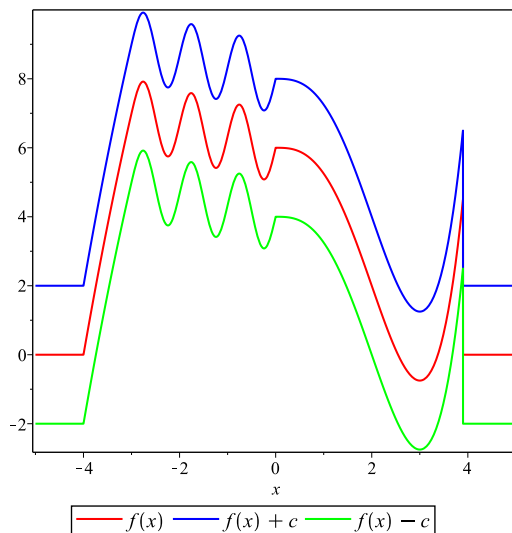
$$f(x + c), \quad f(x - c), \quad f(-x), \quad f(c - x)$$

- c) [L] Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

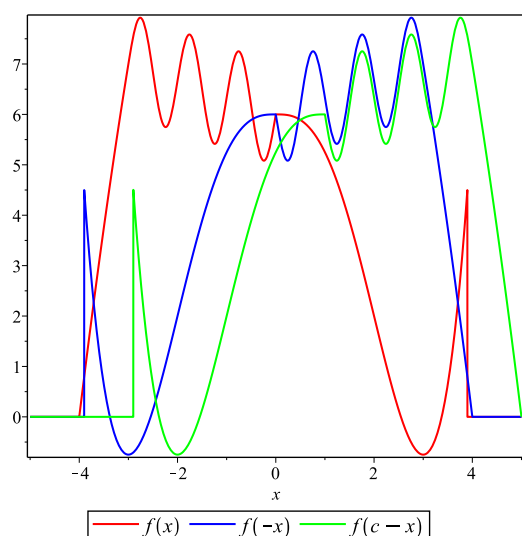
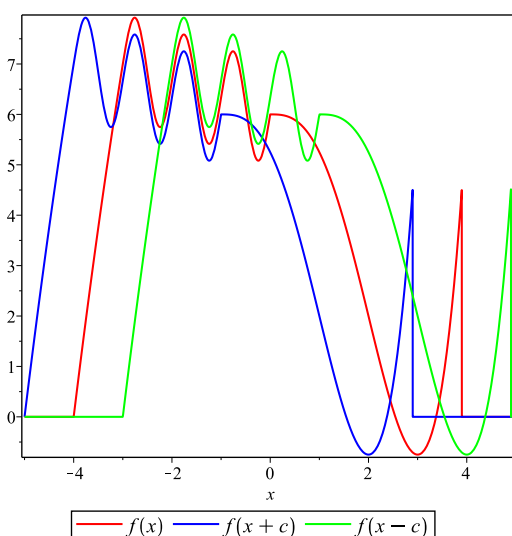
$$f(cx), \quad f(x/c)$$

- d) [L] *What about $f(1/x)$?*

a)

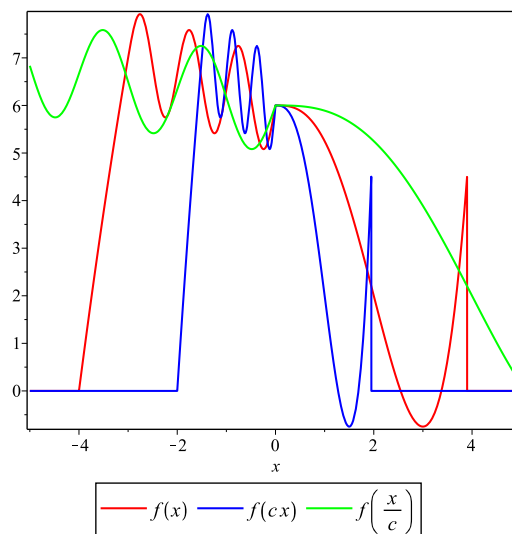


b)



¹ Für eine anschauliche Darstellung ist es günstig, eine Funktion zu wählen, die auf einem Intervall $[-a, a]$ ungleich 0 und außerhalb dieses Intervalles 0 ist. Verwenden Sie Handskizzen, oder (besser) computergenerierte Zeichnungen für konkretes f und konkrete Werte von c .

c) Hier wurde $c > 1$ gewählt:



d) Qualitativ ausgedrückt, etwa für $x > 0$: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ‘vertauscht die Rollen von 0 und ∞ ’.

Daher verhält sich $f(1/x)$ für $x \rightarrow 0$ so wie $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$, und umgekehrt.

Gegeben sei die Funktion $f: (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+p(x)} - 1}{x^2},$$

wobei $p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

- a) [L] Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta > 0$.
- b) [L] Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck ' $f(0) = 0/0$ '. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Geben Sie für diesen Fall den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

- a) $p(0) = 0$, und $p(x)$ ist stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 : |p(x)| < 1$ für $|x| < \delta$
 $\Rightarrow \sqrt{1+p(x)} \in \mathbb{R}$ und $f(x)$ wohldefiniert für $|x| < \delta$. ✓

- b) Umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+p(x)} - 1}{x^2} = \frac{(\sqrt{1+p(x)} - 1)(\sqrt{1+p(x)} + 1)}{x^2 (\sqrt{1+p(x)} + 1)} \\ &= \frac{p(x)}{x^2 (\sqrt{1+p(x)} + 1)} \end{aligned}$$

- Für $a_1 = 0$ (d.h. $p'(0) = 0$) ist

$$p(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = x^2 (a_2 + a_3 x + \dots)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_2 + a_3 x + \dots}{\sqrt{1+p(x)} + 1} = \frac{a_2}{2}$$

mit hebbarer Unstetigkeit.

- Für $a_1 \neq 0$ liegt eine 'echte' Unstetigkeit vor, mit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$.

Alternativen zur Bestimmung des Grenzwertes: *Regel von de l'Hospital*, oder *Taylor-Entwicklung* (später).

□

Die Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert als $f_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- a) [L] Untersuchen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen.
 b) [L] Zeichnen Sie einige Funktionsgraphen für $n = 1, 2, 3, \dots$
 c) [L] Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

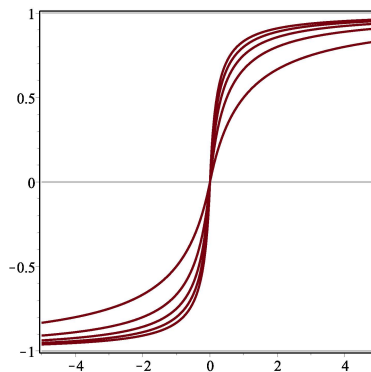
Geben Sie f explizit an. Ist f stetig?

- d) [L] Sei $g_n(x) = \frac{nx}{1 + (nx)^2}$

Vermutung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Ist das richtig?

- a) Die f_n sind stetig auf ganz \mathbb{R} als Komposition stetiger Funktionen.

- b) $n = 1 \dots 5$:



- c) $f(x) = x$ -abhängiger Limes für $n \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ ist unstetig an $x = 0$ (Sprungstelle).

- d) Die Aussage ist richtig: Für alle ($0 \neq$) $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|g_n(x)| < \frac{1}{|nx|} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \checkmark$$

Beachte jedoch (siehe Skizze):

$$g_n\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \pm \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Anmerkung:

$$f_n(x) = f_1(nx),$$

$$g_n(x) = g_1(nx) \quad \text{für alle } n.$$

