

Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

[Aufgabe 1:](#) Untersuchung von Reihen mittels Konvergenzkriterien

[Aufgabe 2:](#) (*) Konvergenz von Reihen ähnlich zu geometrischen Reihen

[Aufgabe 3:](#) Wachstum einer Population bei variierender Migration

[Aufgabe 4:](#) (*) Konvergenz einer von zwei Parametern abhängigen Reihe

[Aufgabe 5:](#) Eine faule Reihe und eine lustige Reihe

[Aufgabe 6:](#) Beispiele für Prüfungsfragen zum Thema Reihenkonvergenz

[Aufgabe 7:](#) (*) Bello, das Krabbelmonster

[Aufgabe 8:](#) Modulation von Funktionen

[Aufgabe 9:](#) (*) Stetige Fortsetzbarkeit

[Aufgabe 10:](#) Parameterabhängige Funktionen (Funktionenfolge)

a) Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$ absolut konvergent?

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{x}{n}\right)^n$ absolut konvergent?

d) Untersuchen Sie die bedingte und die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}}$$

- a)** Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, wobei $0 \leq a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kann man daraus schließen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert?

Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- b)** Geben Sie – im Vergleich zu **a)** – eine stärkere Bedingung an die a_n an, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert.

- c)** Für welche $\xi > 0$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ konvergent?

(Anmerkung: Der Wert dieser Reihe lässt sich nicht exakt berechnen.)

- d)** (*) Zeigen Sie, dass für $\xi = \frac{1}{2}$ der Wert der Reihe aus **c)** kleiner als 3 ist.

Sei $0 \leq p < 1$. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge (a_n) mit

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p a_{n-1} + q_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit einer gegebenen Folge (q_n) .

- a) Geben Sie Darstellung der a_n in Form einer Summe an.
- b) Sei $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \rightarrow \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge (q_n) an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- c) (*) Die Frage der Konvergenz der Folge (a_n) lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie:

Die Population a_n stirbt aus für $n \rightarrow \infty$. (Beachte: $p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe¹

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \right)$$

konvergent?

¹ n_0 hinreichend groß, so dass Summand wohldefiniert (keine Division durch 0, die im Fall $n = b \in \mathbb{N}$ und $n = -a \in \mathbb{N}$ auftreten würde).

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren, und werten Sie einige Partialsummen numerisch am Rechner aus, um das Konvergenzverhalten zu beobachten.

a)
$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Achtung: Die Konvergenz ist sehr langsam.

b)
$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right)}{2k+1}$$

Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob die beiden folgenden Aussagen wahr sind. Um ggf. zu zeigen, dass dies nicht zutrifft, gibt man am besten ein Gegenbeispiel an.

- a) Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
- b) Sei (b_n) eine Nullfolge, und für die Folge (a_n) gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- c) Für die positiven Folge (a_n) und (c_n) gelte $c_n < 1$ und $a_{n+1} \leq c_n a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
-

Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichseitigen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang ‘unendlich oft’, wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n -ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ .

- a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?
- b) Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)

Man wähle irgendeine Funktion¹ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und skizziere ihren Graphen. Weiters sei $c > 0$ ein reeller Parameter.

- a) Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x) + c, \quad f(x) - c, \quad c f(x), \quad -c f(x).$$

- b) Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x + c), \quad f(x - c), \quad f(-x), \quad f(c - x)$$

- c) Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(cx), \quad f(x/c)$$

- d) *What about $f(1/x)$?*
-

¹ Für eine anschauliche Darstellung ist es günstig, eine Funktion zu wählen, die auf einem Intervall $[-a, a]$ ungleich 0 und außerhalb dieses Intervalles 0 ist. Verwenden Sie Handskizzen, oder (besser) computergenerierte Zeichnungen für konkretes f und konkrete Werte von c .

Gegeben sei die Funktion $f: (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + p(x)} - 1}{x^2},$$

wobei $p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

- a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta > 0$.
- b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck ' $f(0) = 0/0$ '. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Geben Sie für diesen Fall den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

Die Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert als $f_n(x) = \frac{n x}{1 + |n x|}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen.

b) Zeichnen Sie einige Funktionsgraphen für $n = 1, 2, 3, \dots$

c) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Geben Sie f explizit an. Ist f stetig?

d) Sei $g_n(x) = \frac{n x}{1 + (n x)^2}$

Vermutung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Ist das richtig?
