Aufgaben zu Kapitel 6

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) [L] Zeigen Sie:

Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen Fixpunkt x^*, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf $g(x) = x - f(x)$ an.

b) [L] Die Funktion f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. f ist eine sogenannte *Kontraktion*.

Zeigen Sie: *Der Fixpunkt x^* ist eindeutig.*

c) [L] Unter den Voraussetzungen gemäß **b)** kann man den Fixpunkt x^* iterativ approximieren:

Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Diese *Fixpunktiteration* erzeugt eine Folge (x_i). Zeigen Sie, dass diese gegen den Fixpunkt x^* konvergiert. Geben Sie auch eine Fehlerabschätzung der Form

$$|x_i - x^*| \;\le\; C_i\, |x_0 - x^*| \tag{1}$$

an. Wie hängen die C_i von der Kontraktionsrate $L \in [0,1)$ ab?

d) [L] Die Ungleichung (1) ist eine sogenannte *a priori - Fehlerabschätzung*. Sie sagt die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration in Abhängigkeit von L voraus.

Eine während des Ablaufes der Iteration auswertbare, sogenannte *a posteriori - Fehlerabschätzung* erhält man daraus mittels $|x_0 - x^*| \le b - a$, sofern man die Kontraktionsrate L kennt.

Zeigen Sie, dass auch folgende, meist bessere a-posteriori - Abschätzung gilt:

$$|x_i - x^*| \le \frac{L}{1-L}\, |x_i - x_{i-1}|\,. \tag{2}$$

---

a) Falls $a = f(a)$ oder $b = f(b)$, besitzt f den Fixpunkt $x^* = a$ oder $x^* = b$.

Also: Annahme

$$a \neq f(a) \quad \text{und} \quad b \neq f(b)\,.$$

Wegen $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ gilt dann $f(a) > a$ und $f(b) < b$.

$\longrightarrow$

Die Funktion

$$g(x) \;:=\; x - f(x)$$

ist auf $[a, b]$ stetig, da f stetig ist, und es gilt

$$g(a) \;=\; a - f(a) < 0, \quad \text{sowie} \quad g(b) \;=\; b - f(b) > 0.$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ g besitzt mindestens eine Nullstelle $x^* \in (a, b)$.

Für dieses x^* gilt $x^* = f(x^*)$: x^* ist Fixpunkt von f. ✓

---

b) Für zwei Fixpunkte x^* und y^* von f gilt mit $L < 1$:

$$|x^* - y^*| \;=\; |f(x^*) - f(y^*)| \;\leq\; L\,|x^* - y^*| \qquad \Rightarrow \qquad x^* = y^*$$

Es gibt genau einen Fixpunkt.

---

c) Konvergenz der Fixpunktiteration: Es gilt

$$|x_i - x^*| \;=\; |f(x_{i-1}) - f(x^*)| \;\leq\; L\,|x_{i-1} - x^*|\,,$$

und daraus mittels Induktion

$$|x_i - x^*| \;\leq\; L^i\,|x_0 - x^*| \;\leq\; L^i\,(b - a)\,.$$

Aus $L^i \to 0$ für $i \to \infty$ folgt $|x_i - x^*| \to 0$, somit $x^i \to x^*$. ✓

---

d) Verwende Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x_i - x^*| &\leq L\,|x_{i-1} - x^*| \\ &\leq L\,|(x_{i-1} - x_i) + (x_i - x^*)| \\ &\leq L\,|x_{i-1} - x_i| + L\,|x_i - x^*| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad |x_i - x^*| \leq \frac{L}{1 - L}\,|x_i - x_{i-1}| \quad ✓$$

□

Gesucht ist eine Lösung $x = x^* \in [0,1]$ der Gleichung $x^5 + 6\,x - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = f(x), \quad f\colon\, [0,1] \to [0,1]: \quad f(x) = \frac{1-x^5}{6}\,.$$

a) [L] Zeigen Sie: *Die Funktion $f\colon\, [0,1] \to [0,1]$ ist eine Kontraktion.*

b) [L] Führen Sie einige Schritte der Fixpunktiteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$, und vergleichen Sie die echten Fehler $x_i - x^*$ mit der Abschätzung (2). Was beobachten Sie?

Hinweis: Die exakte Lösung ist $x^* \approx 0.166645246965575\ldots$

---

a) Es gilt $f[0,1] \subseteq [0,1]$, da $f(0) = \frac{1}{6}$, $f(1) = 0$, und f monoton fallend.

- Lipschitzkonstante von f: Für $x \in [0,1]$ ist

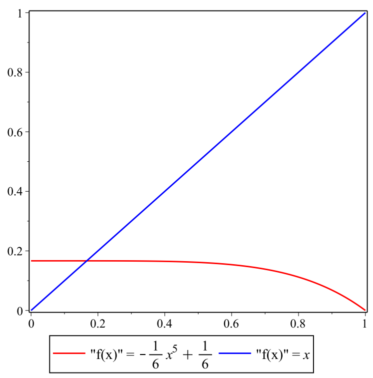
$$|f(x_1) - f(x_2)| \;=\; \tfrac{1}{6}\,|x_1^5 - x_2^5|$$

$$= \tfrac{1}{6}\,|x_1^4 + x_1^3\,x_2 + x_1^2\,x_2^2 + x_1\,x_2^3 + x_2^4| \cdot |x_1 - x_2| \le \underbrace{\tfrac{5}{6}}_{L<1}\,|x_1 - x_2|$$

---

b) Fixpunktiteration ausgehend von $x_0 = 0.5$:

i	$x_i := f(x_{i-1})$
1	0.1614583334
2	0.1666483793
3	0.1666452450
4	0.1666452470
5	0.1666452470
	......



i	$\lvert x_i - x^*\rvert$	$L/(1-L)\,\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
1	0.0051869136	1.693
2	0.0000031323	0.026
3	$2.0131466696 \cdot 10^{-9}$	$1.567 \cdot 10^{-5}$
4	$1.2941709400 \cdot 10^{-12}$	$1.007 \cdot 10^{-8}$
5	$4.5703000000 \cdot 10^{-16}$	$6.473 \cdot 10^{-12}$
	......	......

Die Fehlerabschätzung hier O.K., jedoch etwas zu pessimistisch:

In der Nähe von x^* ist f lokal Lipschitz-stetig mit kleinerem L, d.h., der Graph von f ist dort sehr flach (siehe Skizze).

Daher: schnelle Konvergenz in der Nähe von x^*. □

a) [L] Sei I ein Intervall, $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I. Zeigen Sie:

$\big(f(x_n)\big)$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

b) [L] Sei nun f nur als gleichmäßig stetig vorausgesetzt. Gilt dann die Behauptung aus **a)** noch immer?

c) [L] Gleiche Frage wie zuvor, wobei f nur als stetig vorausgesetzt sei.

---

a)

- Lipschitz Stetigkeit von f auf I:

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; L\,|x-y| \quad \forall\, x, y \in I$$

- (x_n) ist als Cauchyfolge vorausgesetzt d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Zu zeigen: $\big(f(x_n)\big)$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt

$$|f(x_m) - f(x_n)| \;\leq\; L\,|x_m - x_n|$$

$\Rightarrow\quad \big(f(x_n)\big)$ ist Cauchyfolge:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < L\,\varepsilon \quad \checkmark$$

---

b)

- Gleichmäßige Stetigkeit von f auf I:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, \delta > 0 : \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- (x_n) ist Cauchyfolge:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Zu zeigen: $\big(f(x_n)\big)$ ist Cauchyfolge.

Beweis:

(i) Beginne mit der gleichmäßigen Stetigkeit:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, \delta > 0 : \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(ii) (x_n) Cauchyfolge $\quad\Rightarrow$

Für dieses δ $\;\exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \delta$

$\Rightarrow\quad$ Für dieses N: $\quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \quad \checkmark$

$\longrightarrow$

c) Beispiel: $f(x) = 1/x$ auf $I = (0, 1]$ (nicht gleichmäßig stetig)

$(x_n) = (1/n)$ ist Cauchyfolge

$\big(f(x_n)\big) = (n)$ ist <u>keine</u> Cauchyfolge. ✓

Eine physikalische Größe x wird gemessen, wobei ein kleiner Messfehler der maximalen Größe δ unvermeidlich ist, d.h. die Messung liefert einen Wert $\tilde{x}$ mit $|\tilde{x} - x| \le \delta$. Wir interessieren uns für den Wert $f(x)$, wobei f eine gegebene Funktion ist, und fragen nach dem Effekt des Messfehlers in x auf den Funktionswert $f(x)$.

a) [L] Die Funktion f sei als stetig vorausgesetzt (sonst sei über f nichts bekannt). Kann man dann eine explizite Schranke für den maximalen Messfehlereffekt $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angeben?

b) [L] Welche zusätzliche Information über f wird benötigt, damit eine Schranke für $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angegeben werden kann, und wie lautet diese Schranke?

c) [L] Sei konkret $f(x) = \sqrt{x}$ und $x, \tilde{x} > 0$. Geben Sie die gesuchte Schranke an. Ihr Kommentar dazu?

---

a) Nein. Aus der Stetigkeit folgt ohne weitere Information kein quantitativer Zusammenhang zwischen $|\tilde{x} - x|$ und $|f(\tilde{x}) - f(x)|$.

---

b) Man benötigt Lipschitz-Stetigkeit mit bekannter Lipschitzkonstante L. Dann:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \;\le\; L\,|\tilde{x} - x| \;\le\; L\,\delta$$

---

c) Die Funktion $\sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig auf $[0, c]$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} |\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}| &= \left| \frac{\left(\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \right| \\ &= \left| \frac{\tilde{x} - x}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \right| \approx \left| \frac{\tilde{x} - x}{2\sqrt{\tilde{x}}} \right| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\tilde{x}}} \end{aligned}$$

Der Effekt des Messfehlers wird sehr groß und geht gegen ∞ für $x \to 0$.

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie den Funktionsverlauf für die verschieden Fälle:

a) [L] $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x + a}{(x-1)^2}$ **b)** [L] $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 8}{x^2 - 4}$

---

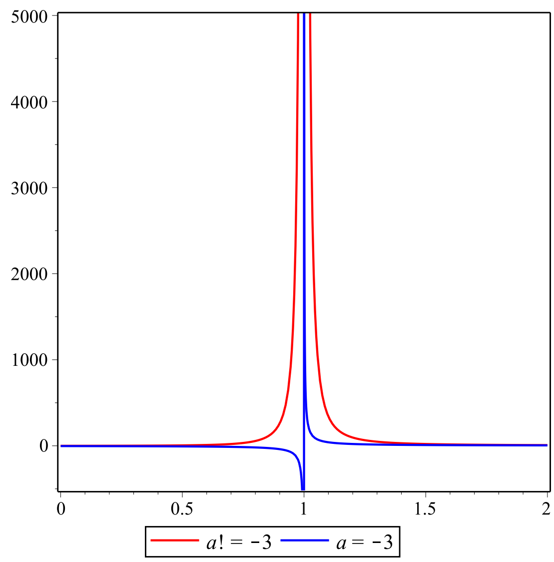
a) Nullstellen des Zählers $x^2 + 2\,x + a$:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$$

Für $a = -3$ ist $x_1 = 1$ auch Nullstelle des Nenners, und $x_2 = -3$.

- ‘Generischer’ Fall $a \neq -3$: Pol 2. Ordnung an $x = 1$.
- Sonderfall: $a = -3 \rightsquigarrow$ Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)}{\cancel{(x-1)}(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$$



---

b) Nullstellen des Zählers $x^2 + a\,x + 8$:

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 32}$$

Für $a = -6$ ist $x_2 = 2 = $ 1. Nullstelle des Nenners, und $x_1 = 4$.

Für $a = 6$ ist $x_1 = -2 = $ 2. Nullstelle des Nenners, und $x_2 = -4$.

$\longrightarrow$

- ‘Generischer’ Fall $a \neq -6, 6$:

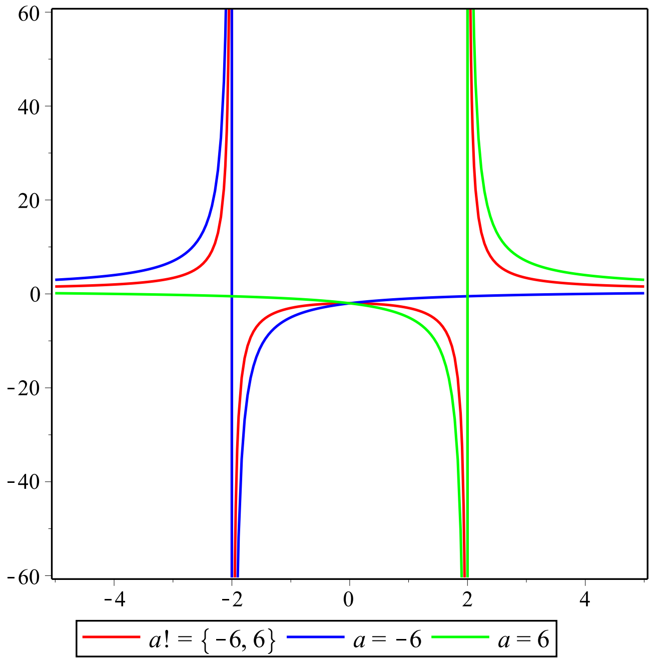
  Je ein Pol 1. Ordnung an $x = -2, 2$.

- Sonderfall (i): $a = -6 \quad \rightsquigarrow \quad$ Pol 1. Ordnung nur an $x = -2$:

$$f(x) = \frac{(x - x_1)\cancel{(x - x_2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{x-4}{x+2}$$

- Sonderfall (ii): $a = 6 \quad \rightsquigarrow \quad$ Pol 1. Ordnung nur an $x = 2$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x - x_1)}(x - x_2)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{x+4}{x-2}$$



a) [L] Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Geben Sie für jede dieser Funktionen eine möglichst kleine Lipschitzkonstante an. Was passiert für $n \to \infty$? Interpretieren Sie die Aussage anhand einer Skizze.

b) [L] Zeigen Sie, dass jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ auf [0,1] Lipschitz-stetig ist, und geben Sie eine Lipschitzkonstante an.

c) [L] Angenommen, $p(x)$ gemäß **b)** hat keine Nullstelle in $[0,1]$. Geben Sie eine Lipschitzkonstante für die Funktion $1/p(x)$ an.

---

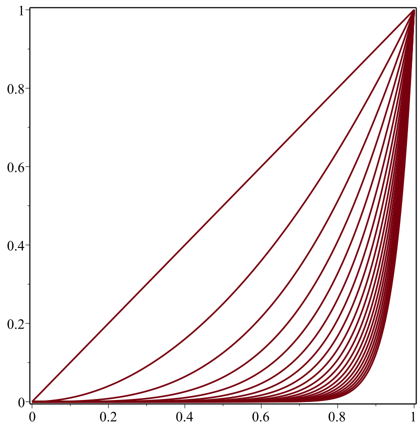
a) Mit

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}$$

folgt für $x, y \in [0,1]$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |x^n - y^n| \le \underbrace{n}_{L} |x-y|$$

Die Lipschitzkonstante $L = n$ geht gegen ∞, da die f_n mit wachsendem n immer steiler verlaufen.



---

b) Bestimmung einer Lipschitzkonstante unter Verwendung des Ergebnisses aus **a)** :

$$|p(x) - p(y)| = \left| \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i y^i \right| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot |x^i - y^i|$$

$$\le \sum_{i=0}^{n} |a_i|\, i \cdot |x-y|$$

$$\Rightarrow \quad L = \sum_{i=1}^{n} i\, |a_i|$$

⟶

---

c) Da $p(x)$ stetig ist und keine Nullstelle hat, ist kein Vorzeichenwechsel möglich. Mit

$$m := \inf_{x \in [0,1]} |p(x)| = \min_{x \in [0,1]} |p(x)|$$

gilt für alle $x, y \in [0,1]$:

$$\left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right| = \left| \frac{p(y) - p(x)}{p(x)\, p(y)} \right| \leq \frac{|p(x) - p(y)|}{m \cdot m}$$

$\Rightarrow$ L/m^2 (mit L aus **b)**) ist Lipschitzkonstante für $1/p(x)$ auf $[0,1]$.

□

Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) > 0$. Wir wissen sonst nichts über diese Funktion, außer:

a) [L] Es sei zusätzlich bekannt, dass es ein c in (a,b) gibt mit $f(c) < 0$. Wieviele Nullstellen besitzt f mindestens in (a,b)? Geben Sie offene Intervalle, an in denen diese sich befinden.

b) [L] Welche Aussage über Anzahl und Lage der Nullstellen in (a,b) kann man treffen, wenn bekannt ist, dass es mindestens eine gibt?

c) [L] Welche Aussage über Anzahl und Lage der Nullstellen in (a,b) kann man treffen, wenn bekannt ist, dass es ein $c \in (a,b)$ gibt mit $f(c) > 0$?

d) [L] Kann man in irgendeinem der drei Fälle **a)**, **b)**, **c)** eine Aussage über die maximal mögliche Anzahl von Nullstellen in (a,b) treffen?

e) [L] Ist es möglich, dass ein Intervall $[c,d] \subseteq (a,b)$ existiert mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [c,d]$? Welche Intervalle $[c,d]$ kommen dafür infrage?

Begründen Sie ihre Antworten, geben Sie Beispiele an, und stellen Sie verschiedene Fälle grafisch dar.

---

a) Es gibt mindestens 2 Nullstellen.

Begründung: Anwendung des Zwischenwertsatzes auf $[a,c]$ und $[c,b]$. Es gibt je mindestens eine Nullstelle in (a,c) und in (c,b).

---

b) Es könnte (aber muss nicht) mehrere Nullstellen geben.

---

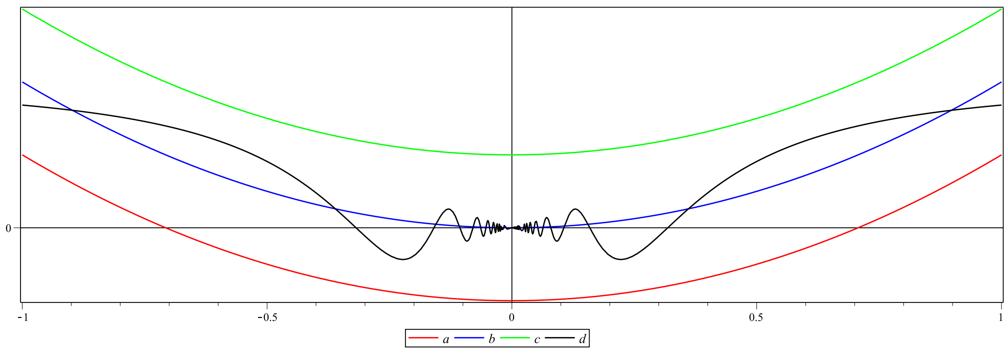
c) Hier liegt keine zusätzliche Information vor, da die Existenz eines $c \in (a,b)$ mit $f(c) > 0$ aus $f(a) < 0$ (bzw. $f(b) > 0$) und der Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen folgt.

Hier ist keine Aussage möglich.

---

d) In keinem der Fälle **a)**, **b)**, **c)** kann man eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen treffen. Es kann auch unendlich viele Nullstellen geben.

⟶



Beispiel für eine stetige Funktion mit unendlich vielen Nullstellen:

$$f(x) \;=\; x\,\sin(\tfrac{1}{x}), \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

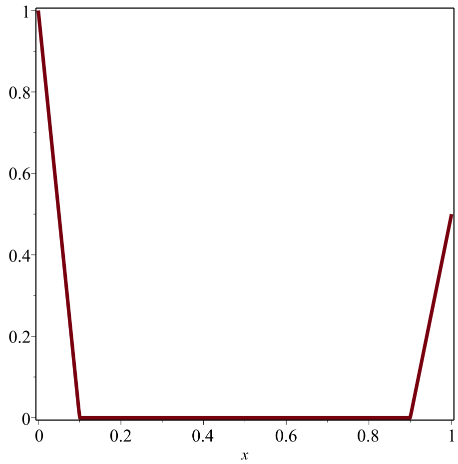
… stetig mit $f(0) = 0$ per stetiger Fortsetzung.

Die Nullstellen $x \neq 0$ sind alle isoliert. $x = 0$ ist ein Häufungspunkt der Menge der Nullstellen.

---

e) Ja.

Beispiel:



Hier ist $[a,b] = [0,1]$, $[c,d] = [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$ und

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 - 10\,x, & x < \frac{1}{10} \\ 0, & x \in [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}] \\ \frac{1}{2} - 5\,(1-x), & x > \frac{9}{10} \end{cases}$$

Analog für beliebiges $[c,d] \in (a,b)$.

Anmerkung; Diese Funktion hat ‘Ecken’; man kann aber auch beliebig ‘glatte’ (unendlich oft diffenzierbare) Funktionen dieses Typs konstruieren.

$\square$

Die Funktion $\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ nennt man den *Polylogarithmus* vom Grad k. (Für $k = 1$ erhält man den gewöhnlichen natürlichen Logarithmus $\ln x$.)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (der Trilogarithmus) auf $[0, 1]$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist, und bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante L.

Hinweis: Verwenden Sie eine Folge von Lipschitzkonstanten für die Funktionen $x^n \colon [0, 1] \to [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Wohldefiniertheit auf $[0, 1]$:

$$\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist konvergente Majorante für alle $x \in [0, 1]$.

- Lipschitz-Stetigkeit auf $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Li}_3(x) - \mathrm{Li}_3(y)\,| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^3} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - y^n}{n^3} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^n - y^n|}{n^3} \\
&\leq |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} \\
&= |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Li}_3(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$ mit $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

□

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

a) [L] Seien f und g gerade Funktionen.

(i) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *ist ebenfalls gerade.*

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls gerade.*

b) [L] Seien f und g ungerade Funktionen.

(i) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *ist ebenfalls ungerade.*

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls ungerade.*

c) [L] Seien f und g monoton wachsende Funktionen.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls monoton wachsend.*

d) [L] Seien f und g monoton fallende Funktionen.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ebenfalls monoton fallend.*

e) [L] Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann ist auch die Folge der $(f(x_n))$ *der Funktionswerte garantiert beschränkt.*

f) [L] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe.

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *der Funktionswerte garantiert konvergent.*

---

a) (i) wahr:

$$(fg)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (fg)(x)$$

(ii) wahr:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

---

b) (i) *falsch:*

$$(fg)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = (fg)(x)$$

D.h., fg ist *gerade.*

(ii) wahr:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$$

$\longrightarrow$

---

c) wahr: Sei $x \le y$. Dann ist $g(x) \le g(y)$, und somit auch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \le f(g(y)) = (f \circ g)(y)$$

---

d) *falsch:* Sei $x \le y$. Dann ist $g(x) \ge g(y)$, und somit

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \le f(g(y)) = (f \circ g)(y)$$

D.h., $f \circ g$ ist *monoton wachsend.*

---

e) wahr:

Eine konvergente Folge ist beschränkt, d.h. es existiert ein Intervall $[a, b]$ mit $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. f ist auf $[a, b]$ stetig und somit beschränkt. Daher ist auch die Folge $(f(x_n))$ beschränkt.

---

f) *falsch:*

Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ kann man ohne weitere Information nur folgern, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Wegen $f(0) = 0$ und der Stetigkeit von f ist dann auch $(f(a_n))$ eine Nullfolge. Dies reicht jedoch nicht aus, um auf die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(a_n)$ zu schließen.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$:

Die 'f-Reihe' ist die divergente harmonische Reihe.

□

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

a) [L] Geben das Bild $B := f([0,\infty))$ an.

b) [L] Zeigen Sie, dass f, aufgefasst als Funktion $f\colon [0,\infty) \to B$, bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an.

c) [L] Was ändert sich, wenn f als Funktion definiert auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet wird?

---

a) Wir stellen fest:

- f ist stetig, strikt monoton fallend (somit injektiv) und nimmt nur positive Werte an.
- Es gilt $f(0) = 1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
- $\Rightarrow \quad B = f([0,\infty)) = (0,1]$.

---

b) Die Bijektivität von $f\colon [0,\infty) \to (0,1]$ folgt unmittelbar aus **a)**.

- Bestimmung der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (0,1] \to [0,\infty)$:

Für $y \in (0,1]$ berechnen wir die eindeutige Lösung x der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= y \\ 1+x^4 &= \frac{1}{y} \\ x^4 &= \frac{1}{y} - 1 \\ x &= \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1} \geq 0 \\ \Rightarrow \qquad f^{-1}(y) &= \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1}, \quad y \in (0,1] \end{aligned}$$

---

c) $f : \mathbb{R} \to (0,1]$ ist gerade und nicht injektiv. Der Bildbereich bleibt gleich. Der 'linke Zweig' $f_-\colon (-\infty, 0] \to (0,1]$ ist wiederum bijektiv, mit der Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = -\sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1} \leq 0, \quad y \in (0,1]$.

□