

Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

[Aufgabe 1](#): Faktorisierung von Polynomen

[Aufgabe 2](#): Lagrange-Interpolation

[Aufgabe 3](#): Partialbruchzerlegung

[Aufgabe 4](#): (*) Mony Lop's Hobby

[Aufgabe 5](#): (*) Rechnen mit Logarithmen, Halbwertzeit etc.

[Aufgabe 6](#): (*) Näherungsformeln für $\ln(1+x)$, $|x|$ klein

[Aufgabe 7](#): Rechnen mit Logarithmen

[Aufgabe 8](#): Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, (i)

[Aufgabe 9](#): (*) Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, (ii)

[Aufgabe 10](#): Der Komet kommt...

Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) [L] $-2x^3 + 14x^2 - 28x + 16$

b) [L] $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k \quad (n \in \mathbb{N})$

c) [L] $x^4 + 1$

d) [L] $x^2 - (a+b)x + ab \quad (a, b \in \mathbb{R})$

e) [L] $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

a) Beachte¹

$$-2x^3 + 14x^2 - 28x + 16 = -2 \underbrace{(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)}_{\text{monisch}},$$

also

$$-2x^3 + 14x^2 - 28x + 16 = -2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \quad x_i = \text{Nullstellen.}$$

Man errät die Nullstelle $x_1 = 1$. Dann Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x^2 - 6x + 8) \\ -x^3 \quad + x^2 \\ \hline -6x^2 + 14x \\ \quad 6x^2 \quad - 6x \\ \hline \quad \quad 8x - 8 \\ \quad \quad - 8x + 8 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Mit $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ folgt schließlich

$$-2x^3 + 14x^2 - 28x + 16 = -2(x-1)(x-2)(x-4).$$

→

¹ 'Monisch' bedeutet: Der führende Koeffizient (bei der höchsten auftretenden Potenz) ist 1.

b) 'Binomi':

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k = (1+x-1)^n = x^n$$

$x = 0$ ist n -fache Nullstelle.

c) $x^4 + 1$ hat keine reelle Nullstelle. Zerlegung in quadratische Faktoren ist jedoch möglich:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

$x^4 + 1$ hat zwei Paare konjugiert komplexer Nullstellen.

Komplexe Faktorisierung:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \underbrace{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \end{aligned}$$

d) Quadratische Gleichung \rightsquigarrow

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$$

'Vieta'-Identitäten:

- Koeffizient bei $x^1 = -(a+b) = -$ Summe der Nullstellen
- Koeffizient bei $x^0 = ab =$ Produkt der Nullstellen

e) Kubische Gleichung \rightsquigarrow

Man errät die Nullstelle $x = a$ (analog $x = b, c$).

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$$

'Vieta'-Identitäten:

- Koeffizient bei $x^2 = -(a+b+c) = -$ Summe der Nullstellen
- Koeffizient bei $x^1 = ab+bc+ca =$ Summe aller gemischten Nullstellenpotenzen vom Grad 2
- Koeffizient bei $x^0 = -abc = -$ Produkt der Nullstellen

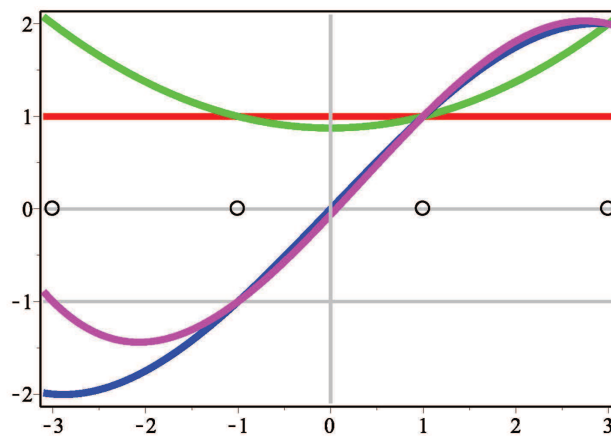
□

Bestimmen Sie das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i), i = 0 \dots 3\}$:

- a) $\{(-3, +1), (-1, +1), (+1, +1), (+3, +1)\}$
- b) $\{(-3, +2), (-1, +1), (+1, +1), (+3, +2)\}$
- c) $\{(-3, -2), (-1, -1), (+1, +1), (+3, +2)\}$
- d) $\{(-3, -1), (-1, -1), (+1, +1), (+3, +2)\}$

Achten Sie auf Symmetrien und dergleichen.

Derartige Aufgaben löst man am besten mit Rechnerunterstützung (etwas Programmierarbeit).



- Lagrange-Polynome zu den Knoten $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-3, -1, +1, +3\}$:

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = -\frac{1}{48}(x + 1)(x - 1)(x - 3)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{1}{16}(x + 3)(x - 1)(x - 3)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = -\frac{1}{16}(x + 3)(x + 1)(x - 3)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{1}{48}(x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

Gemäß Konstruktion gilt $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$.

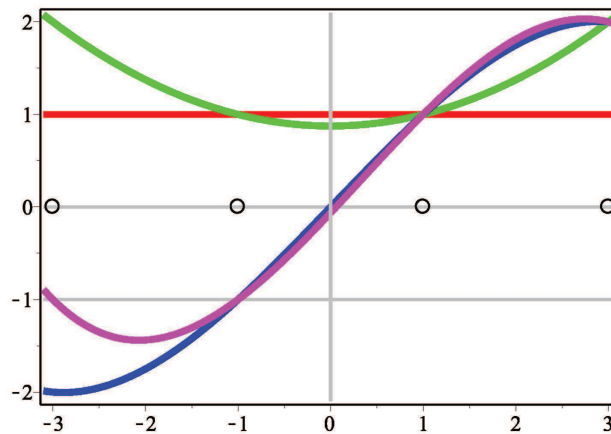
- Eindeutiges Interpolationspolynom: $p(x) = \sum_{i=0}^3 y_i \varphi_i(x)$,

oder (alternativ) mittels Ansatz $p(x) = \sum_{j=0}^3 a_j x^j$ und Lösen des linearen Gls. systems $\{p(x_i) = y_i, i = 0 \dots 3\}$ nach den Koeffizienten a_j .



Das (eindeutige) Interpolationspolynom kann für spezielle Daten auch einen geringeren Grad haben. Dies hängt von den Daten ab, wie etwa von deren Symmetrieeigenschaften.

In dem vorliegenden Beispiel sind die Knoten x_i um 0 symmetrisch verteilt.



a) Man sieht: $p(x) = 1$ (Grad 0, d.h. konstant)

Weiters: Rechnung ergibt

b) $p(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}x^2$ (Grad 2, gerade)

c) $p(x) = \frac{25}{24}x - \frac{1}{24}x^3$ (Grad 3, ungerade)

d) $p(x) = -\frac{1}{16} + \frac{17}{16}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x^3$ (Grad 3, allgemein)

Für gerade/ungerade Datensätze ergibt sich ein gerades/ungerades Interpolationspolynom.

Anmerkung: Falls $x_i = x_k$ für ein mindestens ein Paar (i, k) , $i \neq k$, dann ist die Interpolationsaufgabe

- unlösbar, weil *widersprüchlich*, falls $y_i \neq y_k$,
- lösbar jedoch nicht eindeutig lösbar, weil *unterbestimmt*, falls $y_i = y_k$.

... ein anschauliches Beispiel zur Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme; siehe 'Lineare Algebra'.

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) [L] $\frac{3x^2 - 9x + 6}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$

c) [L] $\frac{1}{1 + x^4}$

b) [L] $\frac{x}{x^3 + x^2 - q^2 x - q^2}$, $q \in \mathbb{R}$

Hinweis zu b): Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

a) Nullstellen des Zählers: $x_1 = 1$, und $x_2 = 2$ = Nullstelle des Nenners.

\Rightarrow

$$\frac{3x^2 - 9x + 6}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18} = \frac{3(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

\rightsquigarrow

$$3(x-1) = A(x+3) + B(x-3)$$

$$x = 3 : \quad 6 = 6A \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x = -3 : \quad -12 = -6B \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

\Rightarrow

$$\frac{3x^2 - 9x + 6}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$$

Anmerkung:

O.K. auch ohne vorher ~~Durchzukürzen~~, aber mit mehr Rechenarbeit.

Der Koeffizient von $1/(x-2)$ ergibt sich dabei zu 0.

b)

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - q^2 x - q^2} = \frac{x}{(x+1)(x-q)(x+q)}$$

‘Generischer’ Ansatz:

$$\frac{x}{(x+1)(x-q)(x+q)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{x+q}$$

 \rightsquigarrow

$$x = A(x-q)(x+q) + B(x+1)(x+q) + C(x+1)(x-q)$$

$$x = -1 : \quad -1 = A(-1-q)(-1+q) \Rightarrow A = \frac{1}{q^2 - 1}$$

$$x = q : \quad q = B(q+1)(q+q) \Rightarrow B = \frac{1}{2(q+1)}$$

$$x = -q : \quad -q = C(-q+1)(-q-q) \Rightarrow C = \frac{1}{2(1-q)}$$

... aber anders für ‘konfluente’ Fälle(mehrfache Nullstellen, Sonderfälle $q = 0, 1, -1$):

- $q = 0$: $x = 0$ is gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner:

$$\frac{x}{(x+1)x^2} = \frac{1}{(x+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

- $q = 1$: Ansatz

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

Rechnung ergibt

$$A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}$$

- $q = -1$: Gleich wie für $q = 1$, weil nur abhängig von q^2 .

c) Umformen:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\ &= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{A + Bx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{C + Dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

\rightsquigarrow

$$1 = (A + Bx)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (C + Dx)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

- Koeffizient bei x^3 $\rightsquigarrow D = -B$

$$1 = A(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + C(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + 2\sqrt{2}Bx^2$$

- Koeffizient bei x^2 \rightsquigarrow

$$A + C + 2\sqrt{2}B = 0$$

- Koeffizienten bei x^1, x^0 \rightsquigarrow

$$A - C = 0, \quad A + C = 1: \quad \Rightarrow \quad A = C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad D = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Also:

$$\frac{1}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) \quad \checkmark$$

- a) [L] Frau Mony Lop rechnet gerne mit Polynomen. Sie sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz \mathbb{R} strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.
- b) [L] Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x - 1)$, $x \geq 0$. Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.

a) Wähle

$a_i = 0$ für i gerade

$a_i \geq 0$ für i ungerade

$\Rightarrow p(x)$ ungerade, monoton wachsend.

Anmerkung: Es gibt auch andere durchwegs monotone Polynome, z.B.

$$p(x) = x^3 - x^2 + x$$

(Beweis mittels Kurvendiskussion.)

b) $p(x) = x(x - 1) = x^2 - x$, $x \geq 0$

Sei $y \geq x$ beliebig. $p(y) - p(x)$ ist durch den Linearfaktor $(y - x)$ teilbar, weil $y = x$ Nullstelle von $q(x) := p(y) - p(x)$. Polynomdivision durch $y - x$ ergibt

$$p(y) - p(x) = \underbrace{y^2 - y - x^2 + x}_{q(x)} = (x + y - 1)(y - x)$$

Forderung für $y \geq x$:

$$p(y) \geq p(x) \Leftrightarrow x + y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 - y$$

wobei $1 - y$ monoton fallend. Da letztere Ungleichung für y beliebig nahe an x gelten muss, folgt als Forderung

$$x \geq 1 - x \Leftrightarrow x \geq \xi = \frac{1}{2}$$

Anmerkung: Das geht viel einfacher mittels Differenzieren:

$$f'(x) = 2x - 1 \geq 0 \quad \text{für } x \geq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

□

- a) [L] Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t + \Delta t) = 2 f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

- b) [L] Gleiche Frage wie unter a), mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

- c) [L] Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte²

$$I(t) = e^{\alpha_1 t} I(0) \quad \text{für } t \in [0, t_1]$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$I(t) = e^{\alpha_2(t-t_1)} I(t_1) \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta t_2} I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ mit passenden c_1 und c_2 .

- d) [L] Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.

- e) [L] In der Standard-Arithmetik (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) auf gängigen Mikroprozessoren kann man (endlich viele) Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

a)

$$f(t + \Delta t) = e^{\lambda(t+\Delta t)} = e^{\lambda t} e^{\lambda \Delta t} = f(t) e^{\lambda \Delta t}$$

$$\Rightarrow f(t + \Delta t) = 2 f(t) \quad \text{für } e^{\lambda \Delta t} = 2, \quad \text{d.h. } \Delta t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

unabhängig von t .

- b) Analog:

$$f(t + \Delta t) = e^{\lambda(t+\Delta t)} = e^{\lambda t} e^{\lambda \Delta t} = f(t) e^{\lambda \Delta t}$$

\Rightarrow

² $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$f(t + \Delta t) = \frac{1}{2} f(t) \quad \text{für } e^{\lambda \Delta t} = \frac{1}{2}, \quad \text{d.h. } \Delta t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\lambda} = \underbrace{\frac{\ln 2}{|\lambda|}}_{\text{'Halbwertszeit'}}$$

→

c) Mit

$$I(t) = e^{\alpha_1 t} I(0) \quad \text{für } t \in [0, t_1],$$

$$I(t) = e^{\alpha_2 (t-t_1)} I(t_1) \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]$$

gilt

$$I(t_2) = e^{\alpha_2 (t_2-t_1)} e^{\alpha_1 t_1} I(0) = e^{\alpha_2 (t_2-t_1) + \alpha_1 t_1} I(0) = e^{\beta t_2} I(0),$$

wobei

$$\beta = \frac{\alpha_2 (t_2 - t_1) + \alpha_1 t_1}{t_2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) t_1 + \alpha_2 t_2}{t_2} = \alpha_1 \frac{t_1}{t_2} + \alpha_2 \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)$$

... Konvexkombination von α_1 und α_2 .d) • Für $x > 0$: Bestimme $\xi \in [0, \ln 2)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x = n \ln 2 + \xi, \quad \text{d.h. } \frac{x}{\ln 2} = n + \frac{\xi}{\ln 2}$$

Dann:

$$e^x = e^{n \ln 2 + \xi} = 2^n e^\xi \approx 2^n \varphi(\xi), \quad \xi \in [0, \ln 2).$$

Beispiel: $x = 10$

$$\frac{x}{\ln 2} = \frac{10}{0.693\dots} = 14.42\dots; \quad \xi = 0.42\dots \cdot \ln 2$$

⇒

$$10 = 14 \ln 2 + 0.42\dots \cdot \ln 2 \approx 14 \ln 2 + 0.29\dots \Rightarrow e^{10} = 2^{14} e^{0.29\dots}$$

• Für $x < 0$ ist $e^x = 1/e^{-x}$.

e) Rechnen:

$$e^x = 10^{\pm 300} = e^{\pm 300 \ln 10} \approx e^{\pm 300 \cdot 2.3} = e^{\pm 690}$$

\Rightarrow Für $[a, b] \approx [-690, 690]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.



- a) [L] Geben Sie eine Näherungsformel der Gestalt $c_0 + c_1 x \approx \ln(1+x)$ für $x \in [0, \varepsilon]$ an, indem Sie die Werte $\ln(1)$ und $\ln(1+\varepsilon)$ linear interpolieren. (Dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest, aber ‘klein’.) Die Koeffizienten c_0 und c_1 hängen von ε ab. Wie lauten sie?

Anmerkung: Um diese lineare Approximationsfunktion in einem gegebenen Intervall $x \in [0, \varepsilon]$ zu verwenden zu können, benötigt man einen einzigen Funktionswert an der festen Stelle $x = \varepsilon$, den man sich extra verschafft.

- b) [L] Eine weitere einfache lineare Approximation für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x = 0$ lautet $\ln(1+x) \approx x$, das ist genau die Tangente an den Graphen von $\ln(x)$ an der Stelle $x = 0$. Diskutieren Sie den Unterschied in der Genauigkeit der beiden Approximationen **a)** und **b)** in Abhängigkeit von x , indem sie eine Skizze erstellen. Argumentieren Sie ‘anschaulich’ aufgrund Ihrer Skizze.

Anmerkung: Für beide Fälle können rigorose Fehlerabschätzungen angegeben werden, die wir hier jedoch hier nicht diskutieren.

- a) Lineare Interpolierende (Gerade) durch $\ln 1$ und $\ln(1+\varepsilon)$:

$$f(x) = \ln 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln 1}{(1+\varepsilon) - 1} (x - 0) = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} x$$

$\rightsquigarrow c_0 = 0, c_1 = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$. Dies erfordert einmalige hinreichend genaue Auswertung von $\ln(1+\varepsilon)$ für festes ε .

- b) Zwei lineare Approximationen für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x = 0$:

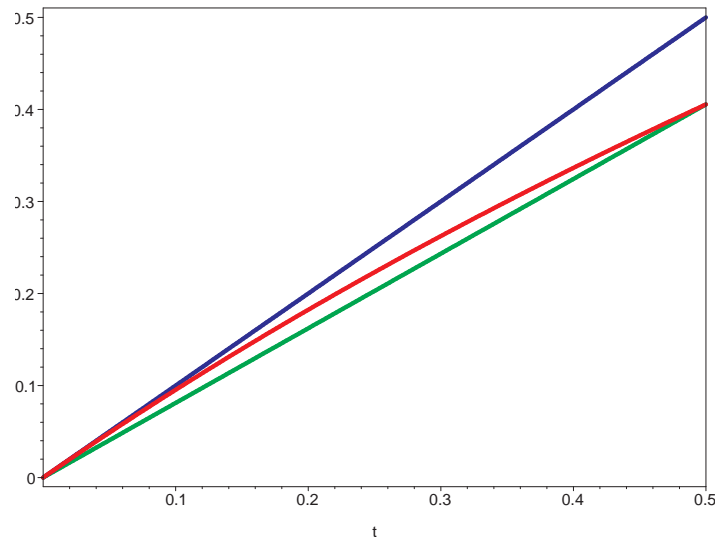
a) $\ln(1+x) \approx \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} x$ (Sekante bzgl. $x = 0$ und $x = \varepsilon$)

und

b) $\ln(1+x) \approx x$ (Tangente bei $x = 0$)

a) ist ‘gleichmäßige’ Approximation in $[0, \varepsilon]$;

b) ist genauer für hinreichend kleine $|x|$.



Verlauf für $\varepsilon = 0.5$



Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (mit $a, a_i > 1$):

a) [L] $\log_a(\log_a(a^{ax}))$

b) [L] $\log_3(7) - \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{7})$

c) [L] $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$

d) [L] $\log_{a_1}(a_2) \log_{a_2}(a_3) \cdots \log_{a_{n-1}}(a_n) \log_{a_n}(a_1)$

a)

$$\begin{aligned} \log_a(\log_a(a^{ax})) &= \log_a(ax) \\ &= \log_a(a^1) + \log_a(x) = 1 + \log_a(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \log_3(7) - \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{7}) &= \log_3(7) + \log_{\frac{1}{3}}(7) \\ &= \log_3(7) - \log_3(7) = 0 \end{aligned}$$

Anmerkung: Es gilt $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$ wegen

$$\log_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\ln x}{\ln \frac{1}{a}} = -\frac{\ln x}{\ln a} = -\log_a(x)$$

c)

$$a^{\ln(\ln a)/\ln a} = e^{\ln(\ln a)} = \ln a \quad (a > 0)$$

d)

$$\begin{aligned} &\log_{a_1}(a_2) \log_{a_2}(a_3) \cdots \log_{a_{n-1}}(a_n) \log_{a_n}(a_1) \\ &= \frac{\ln a_2}{\ln a_1} \frac{\ln a_3}{\ln a_2} \cdots \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} \frac{\ln a_1}{\ln a_n} = 1 \end{aligned}$$

□

a) [L] Zeigen Sie $|\cos(x + \varepsilon) - \cos x| \leq \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varepsilon}$

Anmerkung/Hinweis: Damit kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Geben Sie auch einen Beweis für diese Ungleichung an.

b) [L] Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten

(i) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

(ii) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

c) [L] Zeigen Sie

$$\arcsin \xi + \arcsin \eta = \arcsin (\xi \sqrt{1 - \eta^2} + \eta \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \text{für } \xi^2 + \eta^2 \leq 1.$$

a) • Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung (Spezialfall):

Wir quadrieren links und rechts und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned} |a_1 b_1 + a_2 b_2|^2 &= a_1^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \\ (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{aligned}$$

Differenz zweite Zeile – erste Zeile:

$$a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 > 0 \quad \checkmark$$

• Additionstheorem für cos verwenden:

$$\begin{aligned} \cos(x + \varepsilon) - \cos x &= \cos x \cos \varepsilon - \sin x \sin \varepsilon - \cos x \\ &= \cos x (\cos \varepsilon - 1) - \sin x \sin \varepsilon \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung anwenden

(mit $a_1 = \cos x$, $a_2 = -\sin x$, $b_1 = (\cos \varepsilon - 1)$, $b_2 = \sin \varepsilon$) \longrightarrow

$$\begin{aligned}
& |\cos x (\cos \varepsilon - 1) - \sin x \sin \varepsilon| \\
& \leq \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} \sqrt{(\cos \varepsilon - 1)^2 + \sin^2 \varepsilon} \\
& = 1 \cdot \sqrt{\cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon + 1 + \sin^2 \varepsilon} \\
& = \sqrt{2 - 2 \cos \varepsilon} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Additionstheoreme für \sin , \cos verwenden und umformen:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \sin 2x &= 2 \sin x \cos x = 2 \tan x \cos^2 x \\
&= 2 \tan x \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 2 \tan x \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

und

$$\text{(ii)} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \checkmark$$

Anmerkung: Dies gilt jeweils für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\tan x$ endlich).

c) Auf der linken Seite \sin anwenden:

$$\begin{aligned}
& \sin(\arcsin \xi + \arcsin \eta) \\
&= \sin(\arcsin \xi) \cos(\arcsin \eta) + \cos(\arcsin \xi) \sin(\arcsin \eta) \\
&= \xi \sqrt{1 - \eta^2} + \sqrt{1 - \xi^2} \eta \\
&\Rightarrow \quad \checkmark
\end{aligned}$$

- a) [L] Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ an.
- b) [L] Verwenden Sie das Additionstheorem für den Tangens, um ein Additionstheorem für den Arcustangens der Gestalt
- $$\arctan x + \arctan y = \arctan(f(x, y))$$
- herzuleiten. Wie lautet $f(x, y)$?
- c) [L] Lösen Sie die Gleichung $\arctan(x - 1) + \arctan(x + 1) = \arctan(2x)$.

a) Aus $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ folgt ($s = \sin x$, $c = \cos x$)

$$2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2 s^2 + 4 s^2 c^2 = 2 s^2 + 4 s^2 (1 - s^2)$$

\Rightarrow quadratische Gleichung für $s^2 =: \sigma$:

$$-4 \sigma^2 + 6 \sigma - 2 = 0, \quad \text{Lösung: } \sigma = \frac{1}{2}, 1$$

$\Rightarrow \sin x = \pm 1$ oder $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösungen in $[-\pi, \pi]$: $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{4}$, $\pm \frac{3\pi}{4}$

2π -periodische Fortsetzung ergibt alle Lösungen:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Aus $\tan(\xi + \eta) = \frac{\tan \xi + \tan \eta}{1 - \tan \xi \tan \eta}$ folgt (arctan anwenden):

$$\xi + \eta = \arctan\left(\frac{\tan \xi + \tan \eta}{1 - \tan \xi \tan \eta}\right)$$

und weiter mit $\xi = \arctan x$, $\eta = \arctan y$:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Damit ist $f(x, y) = \frac{x+y}{1-xy}$.

c) Mit

$$\begin{aligned}\arctan(x-1) + \arctan(x+1) &= \arctan\left(\frac{2x}{1 - (x-1)(x+1)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)\end{aligned}$$

ist die gegebene Gleichung äquivalent zu

$$[\arctan]\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = [\arctan] 2x \Leftrightarrow 2x = 4x - 2x^3$$

... 3 Lösungen: $x = 0$ und [quadr.Gleichung:] $x = \pm 1$.

Hier wurde verwendet, dass \arctan auf ganz \mathbb{R} definiert und strikt monoton wachsend (also injektiv) ist.

- Sonderfall $x = \pm\sqrt{2}$ ergibt keine weitere Lösung.

(*) Um die Entfernung des Kometen Maximeieris von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B . Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken \overline{AB} und \overline{AM} bzw. zwischen \overline{AB} und \overline{BM} .

- a) [L] Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$. Wie weit ist M von A entfernt?
- b) [L] Messungen sind in der Praxis immer fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha(1 + \varepsilon)$ mit einem *kleinen* relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\alpha}$.

Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε .) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L(1 + \delta)$ mit dem relativen *Fehlereffekt* δ . Was passiert für α nahe an 90° ?

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2 .

- a) Aus $\overline{AB}/2 = \overline{AM} \cos \alpha$ folgt

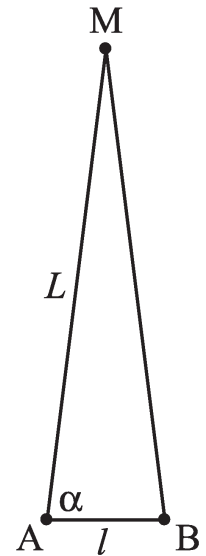
$$L = \overline{AM} = \frac{l}{2} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{l}{2} \sec \alpha$$

- b) Mit

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\alpha} &= \cos(\alpha + \varepsilon \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos(\varepsilon \alpha) - \sin \alpha \sin(\varepsilon \alpha) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{l}{2} \frac{1}{\cos \tilde{\alpha}} = \frac{l}{2} \frac{1}{\cos \alpha \cos(\varepsilon \alpha) - \sin \alpha \sin(\varepsilon \alpha)} \\ &\approx \frac{l}{2} \frac{1}{\cos \alpha - \varepsilon \alpha \sin \alpha} = \frac{l}{2} \frac{\cos \alpha + \varepsilon \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \alpha^2 \sin^2 \alpha} \\ &\approx \frac{l}{2} \frac{\cos \alpha + \varepsilon \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{l}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \varepsilon \frac{\alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \\ &= \underbrace{\frac{l}{2} \frac{1}{\cos \alpha}}_{=L} \left(1 + \underbrace{\varepsilon \alpha \tan \alpha}_{\delta} \right) = L(1 + \delta) = \tilde{L}. \end{aligned}$$



Für $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (und festes ε) gilt $\delta/\varepsilon \rightarrow \infty$, d.h., der Effekt des Messfehlers auf die errechnete Entfernung wächst über alle Schranken.

□