Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) $-2\,x^3 + 14\,x^2 - 28\,x + 16$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $x^4 + 1$

d) $x^2 - (a+b)\,x + a\,b \quad (a, b \in \mathbb{R})$

e) $x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + \,b\,c + \,c\,a)\,x - a\,b\,c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

Bestimmen Sie das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$:

a) $\{\,(-3,+1),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+1)\,\}$

b) $\{\,(-3,+2),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

c) $\{\,(-3,-2),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

d) $\{\,(-3,-1),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

Achten Sie auf Symmetrien und dergleichen.

Derartige Aufgaben löst man am besten mit Rechnerunterstützung
(etwas Programmierarbeit).

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$

b) $\dfrac{x}{x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2}$, $\quad q \in \mathbb{R}$

c) $\dfrac{1}{1 + x^4}$

Hinweis zu **b**): Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

a) Frau Mony Lop rechnet gerne mit Polynomen. Sie sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.

b) Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x-1)$, $x \geq 0$.

Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.

a) Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t + \Delta t) = 2\, f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

c) Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte [1]

$$I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1]$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$I(t) = e^{\alpha_2 (t - t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta\, t_2}\, I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1\, c_1 + \alpha_2\, c_2$ mit passenden c_1 und c_2.

d) Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.

e) In der Standard-Arithmetik (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) auf gängigen Mikroprozessoren kann man (endlich viele) Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

[1] $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) Geben Sie eine Näherungsformel der Gestalt $c_0 + c_1\,x \approx \ln(1+x)$ für $x \in [0,\varepsilon]$ an, indem Sie die Werte $\ln(1)$ und $\ln(1+\varepsilon)$ linear interpolieren. (Dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest, aber 'klein'.) Die Koeffizienten c_0 und c_1 hängen von ε ab. Wie lauten sie?

Anmerkung: Um diese lineare Approximationsfunktion in einem gegebenen Intervall $x \in [0,\varepsilon]$ zu verwenden zu können, benötigt man einen einzigen Funktionswert an der festen Stelle $x = \varepsilon$, den man sich extra verschafft.

b) Eine weitere einfache lineare Approximation für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x = 0$ lautet $\ln(1+x) \approx x$, das ist genau die Tangente an den Graphen von $\ln(x)$ an der Stelle $x = 0$. Diskutieren Sie den Unterschied in der Genauigkeit der beiden Approximationen **a)** und **b)** in Abhängigkeit von x, indem sie eine Skizze erstellen. Argumentieren Sie 'anschaulich' aufgrund Ihrer Skizze.

Anmerkung: Für beide Fälle können rigorose Fehlerabschätzungen angegeben werden, die wir hier jedoch hier nicht diskutieren.

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (mit $a,\ a_i > 1$) :

a) $\log_a(\log_a(a^{ax}))$

b) $\log_3(7) - \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{7})$

c) $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$

d) $\log_{a_1}(a_2)\log_{a_2}(a_3)\cdots\log_{a_{n-1}}(a_n)\log_{a_n}(a_1)$

a) Zeigen Sie $|\cos(x+\varepsilon) - \cos x| \;\leq\; \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\varepsilon}$

Anmerkung/Hinweis: Damit kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|\,a_1\,b_1 + a_2\,b_2\,| \;\leq\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Geben Sie auch einen Beweis für diese Ungleichung an.

b) Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten

(i) $\sin 2x \;=\; \dfrac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}$ (ii) $\cos 2x \;=\; \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

c) Zeigen Sie

$$\arcsin\xi + \arcsin\eta \;=\; \arcsin\left(\xi\sqrt{1-\eta^2} + \eta\,\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad \text{für} \;\; \xi^2+\eta^2 \leq 1\,.$$

a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ an.

b) Verwenden Sie das Additionstheorem für den Tangens, um ein Additionstheorem für den Arcustangens der Gestalt

$$\arctan x + \arctan y = \arctan(f(x,y))$$

herzuleiten. Wie lautet $f(x,y)$?

c) Lösen Sie die Gleichung $\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \arctan(2\,x)$.

(∗) Um die Entfernung des Kometen Maximeieris von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B. Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AM}$ bzw. zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$.

a) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$. Wie weit ist M von A entfernt?

b) Messungen sind in der Praxis immer fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha\,(1 + \varepsilon)$ mit einem *kleinen* relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$.

Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε.) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L\,(1 + \delta)$ mit dem relativen *Fehlereffekt* δ. Was passiert für α nahe an 90° ?

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2.