Aufgaben zu Kapitel 9

a) Sei f eine differenzierbare Funktion. Geben Sie für

$$\frac{d}{dx}\left(f(x^n)\right)^c \quad (c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

einen expliziten Formelausdruck an (in Abhängigkeit von f und f').

b) Beweisen Sie die Identität

$$\frac{d}{dx}\, e^x \;=\; e^x$$

indem Sie von der Ableitungsformel für $\ln x$ ausgehen.

c) Beweisen Sie die Identität

$$\frac{d}{dx}\, \tan x \;=\; 1 + \tan^2 x$$

indem Sie von der Ableitungsformel für $\arctan x$ ausgehen.

d) Für zwei differenzierbare Funktionen $f(y)$ und $y(x)$ gelte

$$f(y(x)) \;\equiv\; \text{const.}$$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung an f an, so dass gilt $y(x) \;\equiv\; \text{const.}$

a) Seien f und g zweimal differenzierbare Funktionen. Berechnen Sie

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f\big(g(x)\big)$$

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare [un]gerade Funktion. Ist dann auch die Ableitung $f'(x)$ [un]gerade? Beweisen Sie ein entsprechendes Resultat.

c) Sei $x \in (-1, 1)$. Berechnen Sie die Ableitungen von

$$f(x) = 2\,\arctan x, \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)$$

Was schließen Sie daraus?

(∗) Finden Sie die Produktregel für

$$\frac{d}{dx}\Big(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\Big)$$

und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ folgender Funktionen:

a) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad x \neq 0$

b) $f(x) = \cos(x^2)\cos^2 x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right), \quad x \neq 0$

d) $f(x) = x^x\,, \quad x > 0$

Zu **d)**: Vorsicht, Falle.

a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\textbf{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\ ,\quad \textbf{(ii)}\ \lim_{x\to\infty} x\,\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\ ,\quad \textbf{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5}$$

b) Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ existieren die Grenzwerte (für festes x)

$$\textbf{(i)}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}\ ,\quad \textbf{(ii)}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2}\ ?$$

Wie lautet dann jeweils der Grenzwert?

Der Widerstand R eines Schwingkreises mit der Kapazität $C = 20$ und Induktivität $L = 5$ ist zu bestimmen. Dazu wird die Kreisfrequenz ω gemessen. Der gemessene Wert sei $\omega = 7$, mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$.

Wie lautet dann der numerische Wert von $R = \dfrac{1}{\omega C - 1/(\omega L)}$, und welchen relativen Fehler (in %) erwarten Sie bei der Auswertung von R aufgrund einer kleinen Störung in der Messung von ω?

a) Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Verwenden Sie **a)** dazu, um den Binomischen Lehrsatz induktiv zu beweisen.

Hinweis: Differenzieren Sie jeweils die linke und die rechte Seite.

Zwei Kometen K_1, K_2 bewegen sich entlang folgender Bahnen in der (x, y)-Ebene:

$$K_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \quad K_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Entscheiden Sie, ob die Kometen zu irgend einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ kollidieren. Falls ja, geben Sie den Zeitpunkt $t = t_{koll}$ der Kollision an. Falls nein, geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt $t = t_{min}$ die Kometen minimalen Abstand zueinander haben, und geben Sie den minimalen Abstand an. Gibt es mehrere Minima?

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion $f(t)$.

b) Untersuchen Sie, ob die unter **a)** betrachtete Funktion $f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex bzw. strikt konvex ist.

a) Auf einem unbekannten Planeten wirft ein Astronaut einen Stein mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben. Nach 10 Sekunden fällt der Stein zu Boden.

- Wie groß ist – in m/s^2 – die Beschleunigung auf Grund der Gravitation (also das Analogon zur Erdbeschleunigung) auf diesem Planeten?
- Wie hoch fliegt der Stein?

Hinweis: Sie benötigen ein (sehr einfaches) Integral.

b) Diskutieren Sie (informell) die Frage, ob es – bei hinreichend großer Abwurfgeschwindigkeit – möglich ist, dass sich der Stein vom Planeten wegbewegt und in den Weiten des Alls verschwindet.

Herr B. geht mit seinem Hund Bello auf einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Bello erblickt etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig in einem Winkel senkrecht zur Straße davon. 1000 m von Herrn B.'s Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m von diesem entfernt ist, blitzt ihn das Radar, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radargerät wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gemessen).

Hat Bello in diesem Moment die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit von 20 km/h *überschritten?*