Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (online am Dienstag, 01.12.2020) (*mit Lösung*)

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal* $3 \times 4 = 12$

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\text{Kästchen}}$ ***eingetragenen Antworten.***

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. Überlegen Sie zuerst bzw. machen Sie sich separate Notizen, bevor Sie Ihre Lösung samt Herleitung eintragen.

• **Aufgabe 1.**

a) Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, und die Abbildung $f\colon \mathbb{P}^3 \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $\boxed{f(a,b,c) \;=\; a\,b\,c\,.}$

(i) Entscheiden Sie, ob f *injektiv* bzw. *surjektiv* ist. (Begründung!) *[a): 2 P.]*

(ii) – Gleiche Frage wie unter (i), wobei wir jedoch den ursprünglichen Definitionsbereich $D = \mathbb{P}^3$ von f einschränken auf $\widetilde{D} = \{(a,b,c) \in \mathbb{P}^3 : a \le b \le c\}$.

– Welches Problem muss man, für gegebenes $n \in \mathbb{N}$, lösen um entscheiden zu können, ob $n \in f(\widetilde{D})$ gilt? Ist das betreffende Tripel $(a,b,c) \in \widetilde{D}$ mit $f(a,b,c) = n$ eindeutig bestimmt?

(i) nicht injektiv wegen (z.B.) $f(a,b,c) = f(c,b,a)$ (Zahlenbeispiel: $f(2,2,3) = f(3,2,2)$).

nicht surjektiv: Nicht jedes $n \in \mathbb{N}$ wird als Bild unter f angenommen.

(ii) – injektiv, da $a \le b \le c$ angenommen.

nicht surjektiv (vgl. (i)).

– Man muss die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ bestimmen um zu entscheiden, ob n in der Form $a \cdot b \cdot c$ darstellbar ist. Das betreffende Tripel $(a,b,c) \in \widetilde{D}$ ist dann eindeutig bestimmt, da f injektiv ist.

b) Sei $\varepsilon \in (1,2)$ beliebig. *[b): 2 P.]*

(i) Beweisen Sie, dass eine Ungleichung der Gestalt $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (\varepsilon - 1)^{n-k} < \frac{1}{c - \varepsilon}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wie lautet der 'bestmögliche' Wert für die Konstante c, so dass die Ungleichung richtig ist, mit einem möglichst kleinem Wert von $\frac{1}{c-\varepsilon}$?

(ii) Ein zweiter Blick auf (i): Was bedeutet es, in der gegebenen Summe den Limes $n \to \infty$ zu betrachten?[1] Wie lautet der betreffende Grenzwert, und wie hängt dies mit Ihrer Lösung zu (i) zusammen?

(i) Verwende geometrische Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} (\varepsilon - 1)^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\varepsilon - 1)^{\ell} = \frac{1 - (\varepsilon - 1)^n}{1 - (\varepsilon - 1)} < \frac{1}{2 - \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \checkmark, \quad \text{mit } c = 2.$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon - 1)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} (\varepsilon - 1)^{\ell}}_{\text{positiv, monoton wachsend}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} (\varepsilon - 1)^{\ell} = \frac{1}{2-\varepsilon}$$

(geometrische Reihe).

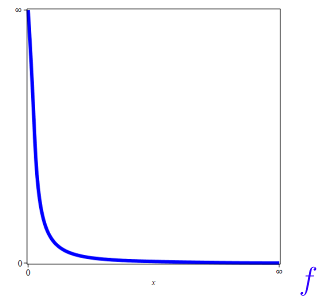
[1] Achtung: Rein formal n durch ∞ zu ersetzen ergibt keinen Sinn.

- **Aufgabe 2.**

a) Die Funktion $\boxed{f\colon\ (0,\infty) \to (0,\infty), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}$ ist bijektiv. Verifizieren Sie dies, indem Sie ihre Umkehrfunktion berechnen. *c): 1.5 P.*

Sei $y > 0$ gegeben. Wir bestimmen $x > 0$ mit $f(x) = y$:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x\,(1+x)} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - \frac{1}{y} \;=\; 0$$



Lösung dieser quadratischen Gleichung:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{y}}\Big)$$

Die eindeutige positive Lösung ($x_1 > 0$) ergibt die Umkehrfunktion von f:

$$f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\Big(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{y}}\Big) > 0 \quad \text{für} \quad y > 0$$

Anmerkung: f ist injektiv (weil strikt monoton fallend) und offensichtlich surjektiv.

b) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot a_n\,, \quad n \geq 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ konvergiert und geben Sie diesem Fall ihren Grenzwert an. *[a): 1 P.]*

Für $a_{n+1} \;=\; \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot a_n$ gilt

$$a_2 \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{1}} \cdot a_1 \;=\; \sqrt{2}\,, \qquad a_3 \;=\; \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot a_2 \;=\; \sqrt{3}\,, \qquad a_4 \;=\; \sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot a_3 \;=\; \sqrt{4}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{a_n\} \;=\; \big\{\sqrt{n}\big\} \quad \text{ist divergent.}$$

c) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}}}$ konvergiert. *[b): 1.5 P.]*

Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) anwenden:

$$\frac{\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}} \;=\; \frac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{2^n\sqrt{(n+1)!}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{n+1}} \;\to\; 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ konvergent.

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{n-k}}{k!} \frac{c^k}{(n-k)!}}$ ($c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *a): 1.5 P.*

'Binomi':

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{n-k}}{k!} \frac{c^k}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^k \, 2^{n-k} = \frac{(c+2)^n}{n!}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{0.0757575757575\ldots}$ unter Verwendung einer ***geometrischen Summe*** in einen möglichst einfachen Bruch um. *[b): 1 P.]*

$$\begin{aligned} 0.0\overline{75} &= \frac{75}{1000} + \frac{75}{100000} + \ldots \\ &= \frac{75}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = \frac{75}{1000} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= \frac{75}{1000} \frac{1}{1 - 1/100} = \frac{75}{1000} \frac{100}{99} = \frac{75}{990} = \frac{15}{198} = \frac{5}{66} \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie: *Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl* $\boxed{(m+1)^n - 1}$ *durch m ohne Rest teilbar.*

Anmerkung: Der Beweis funktioniert mittels Induktion über m (für beliebiges festes n). Sie sollen den Beweis hier jedoch mittels einer *bekannten Summenformel* führen! *[c): 1.5 P.]*

Mittels geometrischer Summe:

$$\frac{(m+1)^n - 1}{m} = \frac{(m+1)^n - 1}{(m+1) - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (m+1)^k \in \mathbb{N}$$

Daraus folgt die behauptete Teilbarkeit. ✓