Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2020/21

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (online, Mittwoch, 27.01.2021) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Polynom $\boxed{p(x) = 3\,x^4 + 20\,x^3 + 41\,x^2 + 20\,x - 12}$ *a): 1.5 P.*

(i) ***Wie viele Nullstellen hat*** $p(x)$ ***im Intervall*** $[0,1]$***?*** (Begründung!)

(ii) Die Ableitung $p'(x)$ hat nur einfache reelle Nullstellen (das brauchen Sie nicht zu überprüfen.) ***Wie viele davon sind negativ?*** (Begründung!)

Anmerkung: Versuchen Sie nicht, die jeweiligen Nullstellen zu berechnen.

(i) $p(x)$ ist auf $[0,\infty)$ strikt monoton wachsend, mit $p(0) = -12$ und $p(1) = 72$.

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ p hat genau eine Nullstelle in $(0,1)$. (Anmerkung: Diese Nullstelle befindet sich an der Stelle $x = 1/3$.)

(ii) $p'(x) = 12\,x^3 + 60\,x^2 + 82\,x + 20$ ist ebenfalls auf $[0,\infty)$ strikt monoton wachsend, mit $p'(0) = 20$.

$\Rightarrow$ Es gibt keine Nullstelle in $[0,\infty)$, daher sind alle **3** Nullstellen von p' negativ.

b) • Sei $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$. ***Berechnen Sie (ohne Rechnerunterstützung!) den Wert von***

$$\boxed{\ln a + \ln b + \ln c \ - \ \ln(a+b+c)}$$

b): 1 P.

• Susi sagt: '*Da ist nichts zu rechnen, das ist ja immer dasselbe für beliebige* $a,b,c > 0$'. ***Ihr Kommentar?***

Susi liegt daneben: Der Logarithmus ist keine additive Funktion. Gemäß den Rechenregeln für Logarithmen gilt vielmehr

$$\ln a + \ln b + \ln c \ = \ \ln\left(a \cdot b \cdot c\right)$$

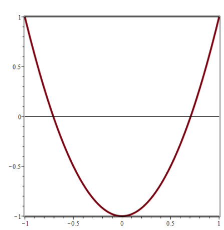
Speziell für $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ gilt jedoch $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$, daher war das Ergebnis 'zufällig' gleich 0:

$$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln(1+2+3) \ = \ 0 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 6 \ = \ \ln(2 \cdot 3) - \ln 6 \ = \ 0$$

c) ***Zeigen Sie, dass die Funktion*** $\boxed{\cos(2\arccos(x))}$ ***für*** $x \in [-1,1]$ ***mit einem Polynom*** $p(x)$ ***übereinstimmt, und geben Sie dieses Polynom*** $p(x)$ ***explizit an.*** *c): 1.5 P.*

Verwende Additionstheorem für cos:

$$\begin{aligned}
\cos(2\arccos(x)) \ &= \ \cos^2(\arccos(x)) - \sin^2(\arccos(x)) \\
&= \ \cos^2(\arccos(x)) - (1 - \cos^2(\arccos(x))) \\
&= \ 2\,x^2 - 1 \ = \ p(x), \quad x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

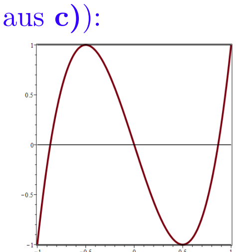


Anmerkung: p ist das sogenannte 'Chebyshev-Polynom' vom Grad 2.

Allgemein: $\cos(n\ \arccos x)$, Grad $n \in N_0$; siehe **d)**.

d) ***Wie c), jedoch für*** $\boxed{\cos(\mathbf{3}\arccos(x))}$ **.** *d): 2 EXTRA-P.*

Verwende Additionstheorem für cos in folgender Weise (unter Verwendung der Lösung aus **c)**):



$$\begin{aligned}
\cos(3\arccos(x)) &= \cos(2\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \sin(2\arccos(x))\sin(\arccos(x)) \\
&= (2x^2 - 1)\,x - \sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}\,\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \\
&= 2x^3 - x - \sqrt{4x^2 - 4x^4}\,\sqrt{1 - x^2} \\
&= 2x^3 - x - 2x\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \\
&= 2x^3 - x - 2x\,(1 - x^2) = 4x^3 - 3x = p(x), \quad x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $f(x)$ eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von f' und f'' – einen ***expliziten Formelausdruck*** an für

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\sinh(f(x))}$$

a): 1 P.

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sinh(f(x)) &= \cosh(f(x))\,f'(x),\\ \frac{d^2}{dx^2}\sinh(f(x)) &= \big(\sinh(f(x))\,f'(x)\big)\,f'(x)+\cosh(f(x))\,f''(x)\\ &= \sinh(f(x))\,(f'(x))^2+\cosh(f(x))\,f''(x)\end{aligned}$$

b) Sei f irgendeine stetig differenzierbare Funktion und x eine feste Stelle im Definitionsbereich von f.

Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}\,f(x)-2\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,f(x-2\,h)}{h}}$

b): 1.5 P.

Z.B. mittels 'de l'Hospital' (0/0) und Kettenregel (Ableitung nach h bei festem x):

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{2}\,f(x)-2\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,f(x-2\,h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{d}{dh}\big(\frac{3}{2}\,f(x)-2\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,f(x-2\,h)\big)}{\frac{d}{dh}(h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\,\frac{d}{dh}\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dh}\,f(x-2\,h)}{1}\\ &= \lim_{h\to 0}\big(+2\,f'(x-h)-2\cdot\tfrac{1}{2}\,f'(x-2\,h)\big) \;=\; f'(x)\end{aligned}$$

c) ***Verwenden Sie Differentialrechnung,*** um zu zeigen, dass die Funktion $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$,

c): 1.5 P.

$\boxed{f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ ***konstant*** ist, und geben Sie den Wert der betreffenden Konstante an.

Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+{}^{1}\!/_{x^2}}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \;=\; \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2} \;=\; 0 \qquad\Rightarrow\qquad f(x)=\mathrm{C}=\text{const.} \quad ✓$$

Für $x=1$ ergibt sich

$$f(1) \;=\; 2\,\arctan(1) \;=\; 2\,\frac{\pi}{4} \qquad\Rightarrow\qquad C=\frac{\pi}{2}$$

- **Aufgabe 3.**

a) ***Zeigen Sie, dass die Funktion*** $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = x^2 \ln x}$ ***ihren minimalen Wert an genau einer Stelle*** $\xi \in (0,1)$ ***annimmt, und geben Sie den Wert von*** ξ ***an.*** *[b): 1.5 P.]*

Bestimme Nullstelle der Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \ln x\right) = 2\,x \ln x + x^2 \,\frac{1}{x} = x\,(2 \ln x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \xi = e^{-1/2} \in (0,1)$$

Überprüfung der zweiten Ableitung an dieser Stelle ξ:

$$f''(\xi) = 2 \ln \xi + 3 = 2 > 0 \quad \checkmark: \ \xi \text{ ist Minimalstelle.}$$

b) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(t) = t^t \ \ (t > 0)}$ *b): 1 P.*

Zeigen Sie: $\exp\left(\dfrac{f'(t)}{f(t)}\right)$ ***ist ein Polynom in*** t. ***Wie lautet dieses Polynom?***

Rechnen:

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{t \ln t}\right) = e^{t \ln t} \cdot \frac{d}{dt}\left(t \ln t\right) = f(t)\left(1 + \ln t\right)$$

$\Rightarrow$

$$\exp\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) = e^{1+\ln t} = e\,t$$

c) ***Für welche Werte des Parameters*** $c \in \mathbb{R}$ ***ist die Funktion*** $\boxed{f(x) = (1+x)^c}$ ***differenzierbar an der Stelle*** $x = 0$***?*** *(Begründung!)* *c): 1.5 P.*

Geben Sie für die betreffenden Werte von c ***auch*** $a, b \in \mathbb{R}$ ***(abhängig von*** c***) an, so dass gilt***

$$f(x) = a + b\,x + o(|x|) \quad \text{für} \ \ x \to 0.$$

f ist für alle $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x = 0$, mit

$$f'(0) = f'(x)\big|_{x=0} = c\,(1+x)^{c-1}\big|_{x=0} = c$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(|x|) = 1 + c\,x + o(|x|) \quad \text{für} \ \ x \to 0.$$

Anmerkung: Nicht-Differenzierbarkeit liegt vor (nicht in der Nähe von $x = 0$ sondern) an der Stelle $x = -1$ für den Fall $c < 1$, $c \neq 0$.