Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 11.02.2022) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			maximal 12

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** ***eingetragenen Antworten.***

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. Überlegen Sie zuerst bzw. machen Sie sich separate Notizen, bevor Sie Ihre Lösung samt Herleitung eintragen.

- **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie den *Grenzwert* der Folge (a_n), mit $\boxed{a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}$ *a): 1.25 P.*

Verwende geometrische Summenformel:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1 \to e-1 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

b) Die positive Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{n} \quad \text{für} \quad n \geq 2}$ *b): 1.5 P.*

(i) *Beweisen Sie, dass gilt* $\boxed{a_n \leq 2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Verwenden Sie Aussage aus **(i)**, um den *Grenzwert* der Folge zu bestimmen. (Berufen Sie sich auf ein bekanntes Prinzip. Sie können **(ii)** beantworten, ohne den Beweis für **(i)** geführt zu haben.)

(i) – Beweis durch Induktion. Der Induktionsanfang $(n = 1)$ ist klar, da $a_1 = 1 < 2$.

– Induktionsschluss $n-1 \mapsto n$:

$$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{n} \overset{\text{IND}}{\leq} 1 + \frac{2}{n} \leq 2 \quad \text{für} \quad n \geq 2 \qquad \checkmark$$

(ii) Verwende Einschließungsprinzip :

Laut Definition der Folge und mit **(i)** gilt

$$1 \leq a_n \leq b_n := 1 + \frac{2}{n}, \quad \text{mit} \quad b_n \to 1 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

c) *Für welche Werte* $x > 0$ *ist die Reihe* $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}}$ *konvergent bzw. divergent?*
(Genaue Begründung!) *c): 1.25 P.*

Verwende Quotientenkriterium: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{x^n}{\ln n}$ $\quad\to$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}}{\frac{x^n}{\ln n}} = x\,\underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\to 1 \text{ für } n\to\infty}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist

- konvergent für $x < 1$
- divergent für $x > 1$

Grenzfall $x = 1$: Ebenfalls divergent, denn $\sum_n \frac{1}{n}$ ist divergente Minorante.

- **Aufgabe 2.**

a) Die Gleichung $\boxed{x^3 - x^2 - 9\,x + 9 = 0}$ hat offenbar die Lösung $x_1 = 1$. ***Berechnen Sie die beiden weiteren Lösungen.*** (Alle Lösungen sind reell. *'Erraten' gilt nicht als Lösung!*) *a): 1 P.*

Verwende Polynomdivision:

```
        x^3 - x^2 - 9 x + 9    /    x - 1   =   x^2 - 9
   -    x^3 - x^2
     ------------------------
              0  - 9 x + 9
   -             - 9 x + 9
     ------------------------
                         0
```

Also: Division durch $x - 1$ ergibt den Quotienten $x^2 - 9$ mit Rest 0.

$\Rightarrow \quad x_2 = 3,\ x_3 = -3.$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1],\ \ f(x) = \cos x}$ ist gegeben durch $\boxed{q(x) = 1 - 4\,\dfrac{x^2}{\pi^2}}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von f konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $f^{-1}(y)$ und $q^{-1}(y)$? Bitte präzise begründen! *b): 1.5 P.*

Ebenso wie $f(x) = \cos x$ ist die Funktion $q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon\ [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(y) \approx f^{-1}(y) = \arccos y$:

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0,1]$:

$$1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2} \;=\; y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \;=\; \frac{\pi^2}{4}\,\big(1 - y\big)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$x \;=\; q^{-1}(y) \;=\; \frac{\pi}{2}\,\sqrt{1-y} \;\approx\; f^{-1}(y)$$

c) Sei $p(x) = 1 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots a_k\,x^k$ ein Polynom vom Grad k ($k \in \mathbb{N}$).

Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt[n]{p(x)}\ -\ 1}{x} \qquad (n \in \mathbb{N})}$ *c): 1.5 P.*

Ausdruck vom Typ '0/0'. Anwendung der Regel von de l'Hospital ergibt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(p(x))^{1/n} - 1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{n}\,(p(x))^{1/n-1}\,p'(x)}{1} \;=\; \frac{1}{n}\,(p(0))^{1/n-1}\,p'(0) \;=\; \frac{a_1}{n}$$

• **Aufgabe 3.**

a) Bestimmen Sie die alle Werte der Konstanten a so, dass die Funktion $\boxed{f(x) = a\,x^2 + x^3}$ einen *Wendepunkt an der Stelle* $x = 0$ hat. *a): 0.75 P.*

Aus

$$f'(x) = 2\,a\,x + 3\,x^2, \quad f''(x) = 2\,a + 6\,x, \quad f'''(x) = 6 \neq 0$$

folgt

$$a = 0$$

b) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x^{-2}}$ Offenbar gilt $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow\infty} f(x) = \infty$.

(i) *Ist f [strikt] konvex?* (Begründung!)

(ii) *Wie lautet die größte Konstante $b > 0$,* für die gilt $f(x) > b$ für alle $x > 0$? *b): 0.75 P.*

(i) Erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = 2\,x - \frac{2}{x^3}, \qquad f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$$

$f''(x) > 0$ für alle $x > 0$ $\Rightarrow$ f ist strikt konvex.

(ii) Nullstelle der Ableitung (Minimalstelle von f):

$$x = 1, \quad \text{mit } f(1) = 2, \quad f''(1) > 0$$

$\Rightarrow$ $f(x) \geq 2$ für alle $x > 0$, und $f(x) > 2 - \varepsilon$ für alle $x > 0$ und beliebig kleine $\varepsilon > 0$.

Aber: Die gesuchte Konstante b existiert nicht.

c) Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare, bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Es gelte durchwegs $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$.

(i) *Drücken Sie die erste und zweite Ableitung der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ mittels der Ableitungen von f aus.* *c): 2.5 P.*

(ii) Angenommen, f ist strikt konvex. *Wie sieht es diesbezüglich für die Umkehrfunktion f^{-1} aus?*

(i) Kettenregel anwenden:

$$\underbrace{\left(f^{-1}\right)'(y)}_{\uparrow} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \left(\text{dies folgt aus } 1 = \left(f \circ f^{-1}\right)'(y) = f'(f^{-1}(y)) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(f^{-1}\right)''(y) = -\frac{1}{\left(f'(f^{-1}(y))\right)^2} \cdot f''(f^{-1}(y)) \cdot \underbrace{\left(f^{-1}\right)'(y)}_{\uparrow} = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{\left(f'(f^{-1}(y))\right)^3}$$

(ii) 'f strikt konvex' bedeutet $f''(x) > 0$ für alle x. Daher folgt aus **(i)**:

— f^{-1} ist strikt <u>konkav</u> für $f' > 0$ (d.h., für f strikt monoton wachsend): $\left(f^{-1}\right)'' < 0$.

(Beispiel: $f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \ln y$. Hier ist $\left(f^{-1}\right)''(y) = -1/y^2$.)

— f^{-1} ist strikt <u>konvex</u> für $f' < 0$ (d.h., für f strikt monoton fallend): $\left(f^{-1}\right)'' > 0$.

(Beispiel: $f(x) = e^{-x}$, $f^{-1}(y) = -\ln y$. Hier ist $\left(f^{-1}\right)''(y) = +1/y^2$.)