Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (DI, 18.01.2022) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 12 [+2]*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\text{Kästchen}}$ ***eingetragenen Antworten.***

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. Überlegen Sie zuerst bzw. machen Sie sich separate Notizen, bevor Sie Ihre Lösung samt Herleitung eintragen.

....

- **Aufgabe 1.**

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\boxed{p(t) = 1, \quad \text{mit } p(t) = t^3 - t^2}$ eine *eindeutige Lösung* $t \in (1,2)$ hat (genaue Begründung!). (Versuchen Sie nicht, die Gleichung zu lösen.) *a): 1.5 P.*

- $p(t) = t^3 - t^2$ ist stetig, mit

$$p(1) = 0 \quad \text{und} \quad p(2) = 4$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $t \in (1,2)$ gibt mit $p(t) = 1$. ✓

- Eindeutigkeit: Es gilt

$$p(t) = t^2\,(t-1)$$

t^2 und $t-1$ sind beide auf $(1,2)$ positiv und strikt monoton wachsend. Daher ist dort auch $p(t)$ strikt monoton wachsend und somit injektiv, woraus die Eindeutigkeit folgt. ✓

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{\cos(2\arcsin(x))}$ für $x \in [-1,1]$ *mit einem Polynom* $p(x)$ *übereinstimmt,* und geben Sie dieses Polynom $p(x)$ an. *b): 1 P.*

Verwende Additionstheorem für cos:

$$\begin{aligned}\cos(2\arcsin(x)) &= \cos^2(\arcsin(x)) - \sin^2(\arcsin(x)) \\ &= (1 - \sin^2(\arcsin(x))) - \sin^2(\arcsin(x)) \;=\; (1-x^2) - x^2 \\ &= 1 - 2\,x^2 \;=\; p(x), \quad x \in [-1,1]\end{aligned}$$

c) Geben Sie für $\boxed{\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(k^n)\Big)}$ $(n \in \mathbb{N})$ einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an, in dem weder exp noch ln vorkommen. *c): 1.5 P.*

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(k^n)\Big) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} n\,\ln k\Big) = \prod_{k=1}^{n} \exp(n\,\ln k) = \prod_{k=1}^{n} k^n = \Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big)^n = (n!)^n$$

- **Aufgabe 2.**

a) *Bestimmen Sie den Grenzwert* $\boxed{\lim_{x\to\infty}\big(\ln(x-1)-2\ln x+\ln(x+1)\big)}$

Begründen Sie Ihre Antwort präzise. *a): 1.5 P.*

$$\begin{aligned}\ln(x-1)-2\ln x+\ln(x+1) &= \ln(x-1)+\ln(x+1)-\ln(x^2)\\ &= \ln((x-1)(x+1))-\ln(x^2)\\ &= \ln(x^2-1)-\ln(x^2)\\ &= \ln\frac{x^2-1}{x^2}=\ln\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)\to 0 \quad \text{für} \quad x\to\infty\end{aligned}$$

weil $1-1/x^2\to 1$ für $x\to\infty$ und ln stetig an der Stelle 1, mit $\ln 1 = 0$.

b) **(i)** Verwenden Sie Differentialrechnung, um zu zeigen, dass die Funktion $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$\boxed{f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)}$ *konstant* ist, und geben Sie den Wert der Konstante an.

(ii) Ist f, aufgefasst als Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, stetig [fortsetzbar]? gerade? ungerade? *b): 1.5 P.*

(i) Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+{}^1\!/_{x^2}}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\mathrm{C}=\text{const.} \quad \checkmark$$

Für $x=1$ ergibt sich

$$f(1) = 2\arctan(1) = 2\,\frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad C=\frac{\pi}{2}$$

(ii) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist ungerade, mit $f(x)\equiv-\frac{\pi}{2}$ für $x<0$.

An $x=0$ ist f unstetig (Sprungstelle).

c) Sei $f(x)$ eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von f' und f'' – einen *expliziten Formelausdruck* an für $\boxed{\dfrac{d^2}{dx^2}\,f(\cosh x)}$ *c): 1 P.*

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\frac{d}{dx}\,f(\cosh x) = f'(\cosh x)\sinh x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,f(\cosh x) = f''(\cosh x)\sinh^2 x + f'(\cosh x)\cosh x$$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben seien zweimal differenzierbare konvexe Funktionen f und g.
Geben Sie eine zusätzliche Bedingung an f und/oder g an, aus der folgt, dass auch die Funktion $\boxed{g \circ f}$ *konvex ist.* *a): 2 P.*

Laut Voraussetzung gilt durchwegs $f'' \geq 0$ und $g'' \geq 0$.

1. und 2. Ableitung von $g \circ f$ (Kettenregel, Produktregel):

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$(g \circ f)''(x) = \big(g''(f(x)) \cdot f'(x)\big) \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot f''(x)$$
$$= \underbrace{g''(f(x))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\big(f'(x)\big)^2}_{\geq 0} + g'(f(x)) \cdot \underbrace{f''(x)}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ ebenfalls konvex, falls durchwegs gilt $g' \geq 0$ (g monoton $\uparrow$; hinreichende Bedingung).

b) Die Gleichung $\boxed{\varepsilon x^2 + x = 1}$ hat für den Sonderfall $\varepsilon = 0$ die Lösung $x = 1$. *b): 2 [+2] P.*

(i) *Wie lauten die Lösungen in Abhängigkeit von ε für $\varepsilon > 0$? Sind sie reell, positiv, negativ?*

(ii) *Wie verhalten sich diese Lösungen im Limes $\varepsilon \to 0+$?*

(iii) Zusatzfrage *[2 Extra-P.]*: *Sind die beiden Lösungen mit wachsendem $\varepsilon > 0$ strikt monoton wachsend bzw. fallend? (Begründung!)* (Rechnung – falls Sie Zeit dafür finden – ggf. auf Extra-Zettel.)

(i) Zwei reelle Lösungen:

$$x_1(\varepsilon) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}}{2\,\varepsilon} > 0, \qquad x_2(\varepsilon) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}}{2\,\varepsilon} < 0$$

(ii) ad $x_1 = x_1(\varepsilon)$: Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich der unbestimmte Ausdruck '0/0'.

Bestimmung des Grenzwertes: Entweder durch algebraische Umformung,

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}}{2\,\varepsilon} = \frac{\big(-1 + \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}\big)\big(-1 - \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}\big)}{2\,\varepsilon\big(-1 - \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}\big)} = \frac{1 - (1 + 4\,\varepsilon)}{2\,\varepsilon\big(-1 - \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}\big)}$$
$$= \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}} \to 1 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0+$$

Einfacher mittels 'de l'Hospital':

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\varepsilon}}{2\,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+4\,\varepsilon}} \cdot 4}{2} = 1$$

– ad $x_2 = x_2(\varepsilon)$: Offenbar gilt

$$x_2 \to -\infty \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0+$$

(iii) [Zusatzfrage]: $x_1(\varepsilon)$ bzw. $x_2(\varepsilon)$ ist für wachsendes $\varepsilon > 0$ SM$\downarrow$ bzw. SM$\uparrow$.

Für x_1 erkennt man das aus obiger algebraischer Umformung. Beides folgt auch aus

$$x_1'(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1 + 4\,\varepsilon} - (1 + 2\,\varepsilon)}{2\,\varepsilon^2\sqrt{1 + 4\,\varepsilon}} < 0, \qquad x_2'(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1 + 4\,\varepsilon} + (1 + 2\,\varepsilon)}{2\,\varepsilon^2\sqrt{1 + 4\,\varepsilon}} > 0$$

(beachte $\sqrt{1 + 4\,\varepsilon} < 1 + 2\,\varepsilon$).