Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2022/23

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (MO, 13.02.2023) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			maximal 12

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** ***eingetragenen Antworten.***

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. Überlegen Sie zuerst bzw. machen Sie sich separate Notizen, bevor Sie Ihre Lösung eintragen.

- **Aufgabe 1.**

a) Das Polynom $\boxed{p(x) \ = \ x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 12}$ hat die Nullstelle $x = 2$.

Berechnen Sie die weiteren Nullstellen. (Erraten gilt nicht als Lösung.) *a): 1.5 P.*

Polynomdivision durch $x - 2$:

```
        x^3 + 3 x^2 -  4 x - 12   /    x - 2   =   x^2 + 5 x + 6
   -    x^3 - 2 x^2
      -----------------------------
              5 x^2 -  4 x - 12
   -          5 x^2 - 10 x
      -----------------------------
                       6 x - 12
   -                   6 x - 12
      -----------------------------
                              0
```

Mit der quadratischen Lösungsformel erhalten wir die zwei weiteren Lösungen: $x = -3, \ x = -2$.

b) ***Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge*** (a_n)***, mit*** $\boxed{a_n = \cos\left(\dfrac{n\,x}{n+x}\right)}$ ***in Abhängigkeit von*** $x \in \mathbb{R}$***, und geben Sie im Fall der Konvergenz ihren Grenzwert an. (Begründung!)*** *b): 1.25 P.*

Aus

$$\frac{n\,x}{n+x} = \frac{x}{1+\frac{x}{n}} \to x \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

folgt mit der Stetigkeit der Cosinusfunktion: Die Folge ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$, mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n\,x}{n+x}\right) = \cos x$$

c) ***Für welche*** $x \in \mathbb{R}$ ***konvergiert die Reihe*** $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(1+x^2)^k}}$ ***?***

Geben Sie Im Fall der Konvergenz auch ihren Wert an. *c): 1.25 P.*

Geometrische Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} q^k$, mit $q = \dfrac{x}{1+x^2}$, konvergent für

$$|q| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \left(1+x^2\right)^2 = 1 + 2\,x^2 + x^4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 + x^2 + x^4 \quad \checkmark$$

Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, mit

$$\sum_{k=2}^{\infty} q^n = \frac{q^2}{1-q} = \frac{\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)}$$

- **Aufgabe 2.**

a) ***Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe*** $\boxed{\sum_{k=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k^2}}$ *a): 1.25 P.*

Beachte zunächst:

$$\left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k^2} = \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k \cdot k} = \left(\left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k}\right)^{k}$$

Wurzelkriterium $\rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k} = e^{-2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

b) ***Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von*** $\boxed{\frac{1}{x^2 + x^3}}$ *b): 1.5 P.*

Der Nenner lautet $x^2\,(1 + x)$, mit doppelter Nullstelle $x = 0$ und einfacher Nullstelle $x = -1$.

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{1}{x^2 + x^3} = \frac{1}{x^2\,(1 + x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A\,x\,(1 + x) + B\,(1 + x) + C\,x^2$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \; A = -1,\; B = 1,\; C = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 + x^3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + x}$$

c) ***Wie viele Nullstellen*** hat die Funktion $\boxed{f(x) = x\,(1 + x^2) - 1}$ im Intervall $(0, 1)$? (***Begründung!***)

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *c): 1.25 P.*

- $f(x) = x^3 + x - 1$ ist stetig, mit

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1 > 0.$$

$\Rightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle in $(0, 1)$.

- f ist durchwegs strikt monoton wachsend und somit injektiv.

$\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle in $(0, 1)$.

- **Aufgabe 3.**

a) ***Entscheiden Sie, ob die Funktion*** $\boxed{f\colon (1,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}}$ ***bijektiv ist, und geben Sie ggf. ihre Umkehrfunktion an.*** *a): 1.5 P.*

Beachte zunächst

$$f(x) = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{2}{x^4-1}$$

- Injektivität: ✓ da strikt monoton fallend
- Surjektivität: f ist stetig, mit

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

  Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ f ist surjektiv. ✓
- f ist also bijektiv. Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y)$.

  Dies entspricht der eindeutigen Lösung $x > 1$ der Gleichung $f(x) = y$ für $y > 0$,

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[4]{1 + \frac{2}{y}}$$

b) ***Berechnen Sie die Ableitung der Funktion*** $\boxed{f(x) = x^{(x^3)}}$ *c): 1.25 P.*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\, x^{(x^3)} = \frac{d}{dx}\, e^{(x^3 \ln x)} = e^{(x^3 \ln x)}\, \frac{d}{dx}\big(x^3 \ln x\big) = x^{(x^3)}\big(3\,x^2 \ln x + x^2\big)$$

$$= x^2\, x^{(x^3)}\big(3 \ln x + 1\big) = x^{(2+x^3)}\big(3 \ln x + 1\big)$$

c) ***Verwenden Sie Differentialrechnung, um zu zeigen, dass die Funktion*** $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ***mit*** *c): 1.25 P.*

$\boxed{f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ ***konstant ist, und geben Sie den Wert der Konstante an.***

Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+{}^{1}/_{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{C} = \text{const.} \ \checkmark$$

Für $x = 1$ ergibt sich

$$f(1) = 2\,\arctan(1) = 2\,\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}$$