Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2022/23

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Test (MO, 21.11.2022) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: ein Notizzettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 12*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Sie können sich Notizen machen; legen Sie jedoch keine zusätzlichen Blätter bei.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die $\boxed{\text{Kästchen}}$ ***eingetragenen Antworten.***

⟶

- **Aufgabe 1.**

a) Tragen Sie ein, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *a): 2 P.*

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0\,,\quad f(n) := n^2 - \sum_{k=1}^{n} k\,,$ ist injektiv. **wahr**

Begründen Sie Ihre Antwort in knapper, aber möglichst präziser Weise:

$$f(n) = n^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n-k) = \sum_{j=0}^{n-1} j$$

bzw.

$$f(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Aus beiden Darstellungen erkennt man $f(n+1) > f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher ist f injektiv (weil die Folge $\{f(n)\}$ streng monoton wachsend ist).

b) Stellen Sie folgendes Produkt in Form eines Binomialkoeffizienten dar $(n \in \mathbb{N})$: *b): 2 P.*

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{j}\right) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Schreiben Sie das Produkt explizit an (in ... - Notation) und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

[Platz für Notizen:]

• **Aufgabe 2.**

a) Geben Sie folgende periodische Dezimalzahl in Form eines gekürzten Bruches an: *a): 1.5 P.*

$$2.\overline{18} = 2.181818181818181818\ldots = \boxed{\frac{24}{11}}$$

b) Formen Sie auf einfachst mögliche Darstellung um (Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$): *b): 1.5 P.*

$$\sum_{k=0}^{n} (n-1)^k \binom{n}{k} (n+1)^k = \boxed{n^{2n}}$$

c) Geben Sie folgende Mengen in möglichst einfacher Weise an: *c): 1 P.*

(i) $\{x \in \mathbb{R}\colon \exists\, n \in \mathbb{N}\colon nx \in \mathbb{Q}\} = \boxed{\mathbb{Q}}$

(ii) $\{x \in \mathbb{Q}\colon \exists\, n \in \mathbb{N}\colon x + n \notin \mathbb{N}\} = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R}\colon x > 0 \text{ oder } x < 1\} = \boxed{\mathbb{R}}$

(iv) $\{x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 2 \text{ oder } x^3 \leq 1\} = \boxed{(-\infty, \sqrt{2}\,)}$

[Platz für Notizen:]

- **Aufgabe 3.**

a) Für welche (fest gewählten) Werte $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge (a_n) beschränkt für $n \to \infty$?

a): 1 P.

$$(a_n) \; = \; \left((c + \tfrac{1}{n})^k \right) \quad \text{beschränkt für} \quad \boxed{c,\, k \quad \text{beliebig}}$$

b) Für welche (fest gewählten) Werte $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge aus a) konvergent, und wie lautet ihr Grenzwert?

b): 1 P.

$$(a_n) \; = \; \left((c + \tfrac{1}{n})^k \right) \quad \text{konvergent für} \quad \boxed{c,\, k \quad \text{beliebig}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = c^k}$$

c) Geben Sie für die durch

c): 2 P.

$$a_1 := 5, \qquad a_n := \tfrac{1}{n} + a_{n-1} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right), \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Folge einen möglichst einfachen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

$$a_n \; = \; \boxed{5 + 3\,(n-1) \; = \; 3\,n + 2}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen: Sehen Sie sich einige Folgenglieder an und folgern Sie daraus die allgemeine Formel.

[Platz für Notizen:]