Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2022/23

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (MO, 16.01.2023) *(mit Lösung)*

— Keine elektronischen Hilfsmittel. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden Kästchen ***eingetragenen Antworten.***

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. Überlegen Sie zuerst bzw. machen Sie sich separate Notizen, bevor Sie Ihre Lösung eintragen.

- **Aufgabe 1.**

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}}$ konvergiert. *[a): 3 P.]*

Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) anwenden:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} \to \frac{\frac{1}{e}}{1} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ konvergent

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\boxed{\frac{1}{x^2+3\,x+2}}$ *[b): 1.5 P.]*

Ansatz (mit Nullstellen -1 und -2 des Nenners):

$$\frac{1}{x^2+3\,x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & 1 = A\,(x+2) + B\,(x+1) \\ x=-1: \quad & 1 = A\,(-1+2) = A \\ x=-2: \quad & 1 = B\,(-2+1) = -B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2+3\,x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

c) Bestimmen Sie den Wert der konvergenten Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3\,n+2}}$ *[c): 1.5 P.]*

Teleskopreihe (vgl. **b)**):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3\,n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots = 1 \end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) **(i)** Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \arctan(\ln x)}$ an der Stelle $x = 0$ rechtsseitig stetig fortsetzbar?

Falls ja, wie lautet der betreffende Funktionswert an der Stelle $x = 0$?

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), für $f'(x)$ (geben Sie $f'(x)$ an). *[a): 2 P.]*

(i) Für $x \to 0+$ ist $\ln x \to -\infty \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0+} \arctan(\ln x) = \lim_{t\to -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{rechtsseitig stetig fortsetzbar an } x = 0.$$

(ii) Weiters für $f'(x) = \dfrac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}$:

nicht stetig fortsetzbar, mit $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$.

Begründung: $1/x$ geht für $x \to 0+$ schneller gegen ∞ als $1 + \ln^2 x$ (Argument ist O.K.), bzw. (wenn man es ganz genau ausführt): de l'Hospital anwenden.

b) Ist die Funktion $\boxed{f(x) = x\,e^{-|x|}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar? (Genaue Begründung!) *[b): 2 P.]*

f dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{x}, & x \le 0 \\ x\,e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases} \quad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}\text{, da stetig an } x = 0 \text{ mit } f(0) = 0$$

f' dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f'(x) = \begin{cases} (1+x)\,e^{x}, & x \le 0 \\ (1-x)\,e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases} \quad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}\text{, da stetig an } x = 0 \text{ mit } f'(0) = 1$$

Also: f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(Anm.: f'' ist nicht mehr stetig an $x = 0$.)

c) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\boxed{f(x) = x^{(x^2)}}$? *c): 2 P.]*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\, x^{(x^2)} = \frac{d}{dx}\, e^{(x^2 \ln x)} = e^{(x^2 \ln x)}\, \frac{d}{dx}\left(x^2 \ln x\right) = x^{(x^2)}\left(2\,x \ln x + x\right)$$

$$= x\, x^{(x^2)}\left(2 \ln x + 1\right) = x^{(1+x^2)}\left(2 \ln x + 1\right)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(x) = \sin(\pi\, x), \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ ist gegeben durch

ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $x = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Geben Sie dieses Polynom an. *a): 3 P.]*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 \quad \text{(Grad 2)}$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$-1 \;=\; f(-\tfrac{1}{2}) \;\overset{!}{=}\; p(-\tfrac{1}{2}) \;=\; a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$$

$$0 \;=\; f(0) \;\overset{!}{=}\; p(0) \;=\; a$$

$$1 \;=\; f(\tfrac{1}{2}) \;\overset{!}{=}\; p(\tfrac{1}{2}) \;=\; a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$$

Lösung:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2,\; c = 0$$

$\Rightarrow$

$$p(x) \;=\; 2\,x \quad \text{(hat nur Grad 1, da ungerade)}$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon\ [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1], \quad f(x) = \cos(\pi\, x)}$ ist gegeben durch

$\boxed{q(x) = 1 - 4\,x^2}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von f konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $f^{-1}(y)$ und $q^{-1}(y)$? Bitte präzise begründen! *b): 3 P.]*

Ebenso wie $f(x) = \cos(\pi x)$ ist die Funktion $q(x) = 1 - 4\,x^2$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon\ [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(y) \approx f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\pi} \arccos y$:

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0, 1]$:

$$1 - 4\,x^2 \;=\; y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \;=\; \frac{1}{4}\,(1 - y)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$x \;=\; q^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{1 - y} \;\approx\; f^{-1}(y)$$