

Eine Extra-Übungseinheit zum Selbststudium, mit Beispielen zur Vorbereitung auf die Vorlesungsprüfung (hauptsächlich Integralbeispiele).

[Aufgabe 1](#): Unbestimmte Integrale (i)

[Aufgabe 2](#): Unbestimmte Integrale (ii)

[Aufgabe 3](#): Integrale, die von einem oder zwei Parametern abhängen

[Aufgabe 4](#): Integration eher theoretisch

[Aufgabe 5](#): Das Integral einer Umkehrfunktion

[Aufgabe 6](#): Das Snoopy-Integral

[Aufgabe 7](#): Uneigentliche Integrale

[Aufgabe 8](#): Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen

[Aufgabe 9](#): Rechnen mit Potenzreihen, illustriert anhand der geometrischen Reihe

[Aufgabe 10](#): Zum Thema Taylorentwicklung und Taylorreihen

Berechnen Sie die Integrale

$$\text{a) [L]} \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \quad \text{b) [L]} \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{c) [L]} \quad \int \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} dx$$

a) Substitution $x = u^2$ (bzw. $\sqrt{x} = u$):

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= \left| \begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u du \end{array} \right| \\ &= 2 \int \frac{u^2}{1+u^2} du = 2 \int du - 2 \int \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 2u - 2 \arctan u = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

b) Substitution $1+x^2 = u^2$ (bzw. $\sqrt{1+x^2} = u$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = u^2 \\ 2x dx = 2u du \end{array} \right| \\ &= \int \frac{u^2-1}{u} u du = \frac{u^3}{3} - u \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} - (1+x^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{1+x^2} (x^2 - 2) + C \end{aligned}$$

c) Mittels PBZ (bzw. direkte Umformung)

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \rightsquigarrow \\ \int \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} dx &= \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{x^2}{x(1+x^2)} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x dx = du \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array} \right| \\ &= \ln|x| - 2 \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u} = \ln|x| - \ln|1+u| \\ &= \ln|x| - \ln(1+x^2) + C \quad \square \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Integrale

a) [L] $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$ b) [L] $\int \ln(1+x^2) dx$ c) [L] $\int \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) dx$

a) Partiiell integrieren:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx &= \int \underbrace{\ln(1+x)}_u \underbrace{x^{-1/2}}_{v'} dx \\ &= \underbrace{\ln(1+x)}_u \underbrace{\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{u'} \underbrace{\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}}_v dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln(1+x) - 2 \underbrace{\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx}_{\text{siehe 1a)}} \end{aligned}$$

b) Partiiell integrieren:

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(1+x^2)}_v dx = \underbrace{x}_u \underbrace{\ln(1+x^2)}_v - \int \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{v'} dx$$

mit

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x$$

⇒

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C$$

c) Substitution gefolgt von zweifacher partieller Integration:

$$\int \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) dx = \left| \begin{array}{l} x^{1/2} = u \\ \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = du \\ dx = 2u du \end{array} \right| = 2 \int u^2 \cos u du$$

→

mit

$$\begin{aligned}\int u^2 \cos u \, du &= u^2 \sin u - 2 \int u \sin u \, du \\ &= u^2 \sin u - 2 \left(-u \cos u + \int \cos u \, du \right) \\ &= u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \sin u\end{aligned}$$

⇒ nach Rücksubstitution:

$$\int \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) \, dx = 2x \sin(\sqrt{x}) + 4\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) - 4 \sin(\sqrt{x}) + C$$

Berechnen Sie die folgenden parameterabhängigen Integrale. Achten Sie auf Sonderfälle.

$$\text{a) [L]} \quad \int \frac{x^2 - a^2}{x^2 + b^2} dx \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad \text{b) [L]} \quad \int x^c \ln x dx \quad (c \in \mathbb{R})$$

a) Polynomdivision bzw. direkte Umformung:

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + b^2} = \frac{x^2 + b^2}{x^2 + b^2} - \frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2}$$

\rightsquigarrow

$$\int \frac{x^2 - a^2}{x^2 + b^2} dx = x - (a^2 + b^2) \int \frac{dx}{x^2 + b^2}$$

2 Fälle:

(i) $b = 0$:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

(ii) $b \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{b} = u \\ dx = b du \end{array} \right| = \frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b}$$

b) 2 Fälle:

(i) $c = -1$:

$$\int \frac{\ln x}{x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array} \right| = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

(ii) $c \neq -1$: partiell integrieren

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^c}_{u'} \underbrace{\ln x}_v &= \underbrace{\frac{x^{c+1}}{c+1}}_u \underbrace{\ln x}_v - \int \underbrace{\frac{x^{c+1}}{c+1}}_u \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx \\ &= \frac{x^{c+1}}{c+1} \ln x - \frac{x^{c+1}}{(c+1)^2} + C \end{aligned}$$

□

- a) [L] Leiten Sie für ein Integral der Gestalt

$$\int (f g'' - f'' g) dx \quad (f = f(x), g = g(x))$$

einen expliziten Formelausdruck her (in Abhängigkeit von f, f', g, g').

- b) [L] Für eine stetige Funktion f gelte

$$\int_a^b f(x) e^{-x} dx = 0$$

Behauptung: f hat mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$.

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

- c) [L] Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Funktion, d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Angenommen es gilt $f(x) > 0$ für mindestens ein $x \in [a, b]$.

Behauptung: Es gilt
$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

- a) Zweimal partiell integrieren:

$$\int f g'' = f g' - \int f' g'$$

mit

$$\int f' g' = f' g - \int f'' g$$

\Rightarrow

$$\int (f g'' - f'' g) = f g' - f' g + C$$

- b) **richtig.** Beweis mittels 2. MWS der \int rechnung, mit $\omega(x) = e^{-x} > 0$:

$\exists \xi \in [a, b]$ mit

$$0 = \int_a^b f(x) e^{-x} dx = f(\xi) \underbrace{\int_a^b e^{-x} dx}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow \xi \in [a, b]$ ist Nullstelle von f .

c) richtig.

Beweis mittels Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen:

Sei $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) > 0$.

$\Rightarrow \exists$ eine Umgebung U von x^* in $[a, b]$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in U$.

\Rightarrow

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_U f(x) dx > 0 \quad \checkmark$$

Sei f integrierbar und bijektiv. Dann besteht zwischen den Stammfunktionen F von f und G von $g := f^{-1}$ der Zusammenhang $G(x) = x g(x) - F(g(x)) + C$ (siehe Satz 12.11).

a) [L] Berechnen Sie $\int \arctan x \, dx$

(i) mittels partieller Integration,

(ii) mit Hilfe von Satz 12.11.

b) [L] Sei $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x e^x$. Drücken Sie $\int g(x) \, dx$ mit Hilfe von $g(x)$ aus.

Anmerkung: $f(x) = x e^x$ ist bijektiv als Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ lässt sich jedoch nicht in elementarer Weise darstellen.

a) (i) Partielle Integration, danach Substitution $1 + x^2 = \xi$:

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan x}_v \, dx \\ &= \underbrace{x}_u \underbrace{\arctan x}_v - \int \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

(ii) Mit $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und¹ $F(x) = -\ln(\cos x) + C$ folgt für $g(x) = \arctan x$:

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= x \arctan x + \ln(\cos(\arctan x)) \\ &= x \arctan x + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \end{aligned}$$

denn aus $x = \frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}$ folgt $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

¹ Substitution; $\cos x = \xi$

b) Mit $f(x) = x e^x$ und $F(x) = x e^x - e^x$ folgt für $g(x)$:

$$\begin{aligned}\int g(x) dx &= x g(x) - \underbrace{g(x) e^{g(x)}}_{= x} + \underbrace{e^{g(x)}}_{= x/g(x)} \\ &= x \left(g(x) + \frac{1}{g(x)} - 1 \right) + C\end{aligned}$$

- a) [L] Berechnen Sie die zweite Ableitung $g''(x)$ der Funktion

$$g(x) = \int_{\xi=x}^0 \left(\int_{\eta=0}^{\xi} f(\eta) d\eta \right) d\xi$$

- b) [L]

- (i) Bestimmen Sie die Stammfunktion F von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$f(x) = x \quad (x < 0), \quad f(x) = e^x \quad (x \geq 0)$$

- (ii) Sei $a < 0, b > 0$. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ auf zwei Arten: Zunächst durch Aufteilung des Integrationsintervalls $[a, b]$ in zwei Teile links und rechts von 0, und dann mit Hilfe der in (i) ermittelten Stammfunktion.

- c) [L] Snoopy ist (nur) ein Hund und kann nicht integrieren. Daher sieht er in einer Integraltafel nach und findet die Formel

$$\frac{2}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}$$

für ein gesuchtes Integral. Charlie Brown rechnet nach, er rechnet richtig, und erhält das Resultat

$$\frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}$$

Charlie Brown sagt: 'Snoopy, deine Formel ist falsch.' *Hat Charlie Brown recht?*

- a) • Erste Ableitung:

$$g'(x) = - \int_{\eta=0}^x f(\eta) d\eta$$

- Zweite Ableitung:

$$g''(x) = -f(x)$$

- b) (i) Die Funktion $f(x)$ ist unstetig an $x = 0$. Es gilt

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{links von } x = 0, \\ e^x + \tilde{C} & \text{rechts von } x = 0. \end{cases}$$

Mit der Wahl $\tilde{C} = C - 1$ ergibt sich

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{links von } x = 0, \\ e^x - 1 + C & \text{rechts von } x = 0 \end{cases}$$

als die **stetige** (jedoch an $x = 0$ nicht differenzierbare) Stammfunktion von f .

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^0 + \left. e^x \right|_0^b = -\frac{a^2}{2} + e^b - 1 \end{aligned}$$

oder dazu äquivalent – mit obiger **stetiger** Stammfunktion F :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (e^b - 1) - \frac{a^2}{2} \quad \checkmark$$

c) Für

$$F_S(x) = \frac{2}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}, \quad F_{CB}(x) = -\frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}$$

gilt

$$F_S(x) - F_{CB}(x) = C = 1$$

\Rightarrow Charlie Brown hat nicht recht.

Beide Stammfunktionen sind korrekt; sie unterscheiden sich nur um eine (Integrations-)konstante.



Überprüfen Sie ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

a) [L] $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ b) [L] $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ c) [L] $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

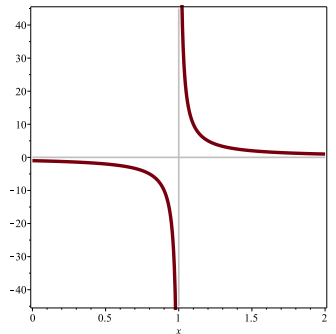
a) Der Integrand hat einen Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln|x-1| \Big|_{x=0}^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \ln|x-1| \Big|_{x=1+\delta}^2 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \ln \delta = -\infty + \infty \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht.

Jedoch:

$$\text{HW} \int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0 \quad (\text{Cauchy'scher Hauptwert}).$$



b) Der Integrand hat eine Unendlichkeitsstelle an $x = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \arcsin x \Big|_{x=0}^c = \arcsin 1 - \arcsin 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \dots \quad \text{konvergent.} \end{aligned}$$

c) Wegen $|\cos x| \leq 1$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$



... liefert konvergente Majorante.

⇒ **c)** ist 'absolut konvergent', mit

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| dx \leq \pi.$$

Anmerkung: Die Bestimmung des exakten Wertes ist nichttrivial, da die Stammfunktion nicht elementar ausdrückbar ist.

- a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums (Satz 12.14) die Konvergenz der Reihen

(i) [L] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$

(ii) [L] $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^{\alpha}}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Hinweis: (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

- b) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \leq \int_m^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

(*) Geben Sie mit Hilfe dieser Ungleichungen je ein Intervall $[a, b]$ an mit

(i) [L] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a, b]$

(ii) [L] $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} \in [a, b]$

- ai) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$,

da das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln c, & \alpha = 1 \end{cases}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert.

- aii) Analoge Überlegung für $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^{\alpha}}$, mit

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{\alpha}} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = dx/x \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}},$$

mit gleicher Folgerung wie für a).

bi) Aus

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

 \Rightarrow

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = 1 + \frac{1}{2},$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Also insgesamt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right].$$

bii) Aus

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} \leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2}$$

folgt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} - \frac{1}{2 (\ln 2)^2} \leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2}.$$

 \Rightarrow

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} \leq \frac{1}{2 (\ln 2)^2} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2} = \frac{1}{2 (\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2},$$

und

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} \geq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Also insgesamt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} \in \left[\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2 (\ln 2)^2} \right] \approx [1.44, 2.48].$$

□

Die Formel für die geometrische Reihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

entspricht genau der Taylor-Entwicklung der Funktion $1/(1-x)$ um die Stelle $x_0 = 0$.

a) [L] Verwenden Sie diese in Verbindung mit einem Satz aus Kapitel 13, um eine

analoge Formel für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad x \in (-1, 1)$ herzuleiten.

b) [L] (*) Gleiche Frage wie unter a), für $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \quad x \in (-1, 1)$

a) Beidseitiges Differenzieren der geom. Reihenformel:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=\emptyset 1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

\Rightarrow nach Multiplikation mit x :

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

b) Wir machen es gleich allgemein: Herleitung einer Rekursion für

$$S_p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n \quad (p \in \mathbb{N}, x \in (-1, 1))$$

mittels Satz 13.5:

$$S'_p(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+1} x^{n-1} = \frac{1}{x} S_{p+1}(x)$$

Also: $S_{p+1}(x) = x S'_p(x)$, mit $S_0(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$

- $p = 1$: $S_1(x) = x S'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ (siehe a))

- $p = 2$: $S_2(x) = x S'_1(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ usw.

□

a) [L] Setzen $f(x) = \frac{(1+x)^{1/3} - (1+cx)}{x^2}$ stetig an $x = 0$ fort. Für welche Werte von c ist dies möglich?

b) [L] (*) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ für die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi} d\xi$$

sowie den zugehörigen Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalles gegen $f(x)$?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Taylorreihe der Funktion $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

a) Gesucht: Parameter $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$f(x) = \frac{(1+x)^{1/3} - (1+cx)}{x^2}$$

stetig fortsetzbar an $x_0 = 0$. Wir verwenden Taylor-Entwicklung:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathcal{O}(|x|^3)$$

\Rightarrow

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathcal{O}(|x|^3)\right) - (1+cx)}{x^2}$$

$\Rightarrow f$ stetig fortsetzbar an $x_0 = 0$ für $c = \frac{1}{3}$, mit $f(0) = -\frac{1}{9}$.

Anmerkung: Man kann auch die Regel von de l'Hospital verwenden.

b) Die Taylorreihe von $g(x) = \ln(1-x)$ an $x_0 = 0$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

konvergiert für alle $x \in (-1, 1)$ gegen $g(x)$ (siehe Kapitel 13).

\Rightarrow

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Gliedweise Integration (Satz 13.4!) ergibt die Reihenentwicklung \rightarrow

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi} d\xi &= - \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n} d\xi \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\xi^{n-1}}{n} d\xi = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in (-1, 1)\end{aligned}$$

(ein sogenannter Dilogarithmus).
