

Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Aufgabe 1: Gauß ein bisschen anders

Aufgabe 2: Binomi und solche Sachen

Aufgabe 3: L'art de la sommation

Aufgabe 4: Eine Rekursion

Aufgabe 5: drei mal drei macht neun

Aufgabe 6: (*) Äquivalenzrelationen und Partitionen

Aufgabe 7: (*) Take a rest

Aufgabe 8: (*) Euklid'scher Algorithmus

Aufgabe 9: (*) Disjunkte Vereinigung

Aufgabe 10: Wie war das nochmal mit injektiv und surjektiv?

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Bestimmen Sie einen einfachen Formel­ausdruck für

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ ungerade}}} k = 1 + 3 + 5 + \dots + n$$

- a) [L] unter Verwendung der bekannten Formel für $\sum_{j=1}^n j$,
 b) [L] direkt mittels eines Induktionsargumentes.

a) Ungerade Indizes: $k = 2j - 1$, $j = 1 \dots m$, mit $n = 2m - 1$.

$$\begin{aligned} \leadsto \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ ungerade}}} k &= \sum_{j=1}^m (2j - 1) = 2 \sum_{j=1}^m j - \sum_{j=1}^m 1 \\ &= 2 \frac{m(m+1)}{2} - m = m^2 + m - m = m^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

b) Falls man das Ergebnis aus a) nicht bereits kennt, kann man es mittels Berechnung einiger Werte für $k = 1, 3, 5, \dots$ vermuten bzw. ‘erraten’.

Formaler Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq 1 \\ k \text{ ungerade}}} k = 1 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss $n \mapsto n + 2$ (für n ungerade):¹

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n+2 \\ k \text{ ungerade}}} k &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ ungerade}}} k + (n+2) \stackrel{\text{IND}}{=} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + (n+2) \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{4} + \frac{4n + 8}{4} = \frac{n^2 + 6n + 9}{4} = \left(\frac{n+3}{2}\right)^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

¹ Dies ist äquivalent zu $m \mapsto m + 1$, wobei $n = 2m - 1$ wie in a).

- a) [L] Schreiben Sie den linken Ausdruck in die Form rechts um und geben Sie die Koeffizienten c_j explizit an:

$$\sum_{k=0}^n (1+x)^k = \sum_{j=0}^n c_j x^j$$

- b) [L] Beweisen Sie durch direkte Rechnung, dass gilt

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

- a) Geometrische Summe; zum Umformen verwende ‘Binomi’:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (1+x)^k &= \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{k-1} = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n+1}{j+1}}_{= c_j} x^j \end{aligned}$$

- b) ‘Binomi’ und Umformen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-1-k+1)!} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 1^j 1^{n-1-j} = n(1+1)^{n-1} = n 2^{n-1} \end{aligned}$$

- a) [L] Bestimmen Sie den Wert von $\sum_{k=1}^n k k!$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Schreiben Sie den Summanden in der Form $f(k+1) - f(k)$.

- b) [L] (*) Wie a), für $\sum_{k=0}^n (k+2) 2^k$ ($n \in \mathbb{N}_0$)

Sollte Ihnen das nicht gelingen, erraten Sie den Wert durch Probieren und gehen über zu c).

- c) [L] Verifizieren Sie das Ergebnis von b) mittels Induktion.

- a) Umformen auf sogenannte *Teleskopsumme* (Summe von Differenzen):

$$\sum_{k=1}^n k k! = \sum_{k=1}^n ((k+1) - 1) k! = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$$

- b) Umformen (ein kleiner Taschenspielertrick):

$$(k+2) 2^k = 2^{k+1} + k 2^k = \underline{2^{k+1} + 2k 2^k} - k 2^k = \underline{(k+1) 2^{k+1}} - k 2^k$$

\leadsto Teleskopsumme:

$$\sum_{k=0}^n (k+2) 2^k = \sum_{k=0}^n ((k+1) 2^{k+1} - k 2^k) = (n+1) 2^{n+1} - 0$$

- c) • Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\sum_{k=0}^0 (k+2) 2^k = 2 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (k+2) 2^k &= \sum_{k=0}^n (k+2) 2^k + (n+1+2) 2^{n+1} \\ &\stackrel{\text{IND}}{=} (n+1) 2^{n+1} + (n+3) 2^{n+1} \\ &= (2n+4) 2^{n+1} = (n+2) 2^{n+2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Folge von Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots , die rekursiv definiert sind gemäß

$$a_0 = 0, \quad \text{und} \quad a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Geben Sie für die a_n einen expliziten Formelausdruck an.

Hinweis: Hier hilft ein kleiner Trick: Betrachten Sie $b_n = 2^{-n} a_n$.

Laut Definition der a_n gilt

$$2^{-n} a_n = 2^{-n-1} a_{n-1} + 2^{-n}$$

\rightsquigarrow für $b_n = 2^{-n} a_n$ (und mit $b_0 = 0$):

$$b_n = b_{n-1} + 2^{-n}$$

Daher gilt

$$b_1 = 2^{-1}, \quad b_2 = 2^{-1} + 2^{-2}, \quad \dots \text{ usw.}$$

Dies ergibt eine geometrische Summe:

$$b_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \frac{2^{-1} - 2^{-(n+1)}}{1 - 2^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - 2^{-n})}{\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Schließlich:

$$a_n = 2^n b_n = 2^n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anmerkung: Dies könnte man auch durch Probieren, Vermutung und ein (einfaches) Induktionsargument beweisen.

Sei

$$p(x) = \sum_{j=0}^n d_j x^j, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad d_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

a) [L] Zeigen Sie:

$$\exists k \in \mathbb{N}: p(10) = 3k \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ell \in \mathbb{N}: p(1) = 3\ell$$

Was bedeutet diese Aussage?

b) [L] Genauso wie a), jedoch mit 9 statt 3.

a) *Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 [b): 9] teilbar, wenn ihre dezimale Ziffernsumme durch 3 [b): 9] teilbar ist.*

Beweis mittels geometrischer Summe:

$$\begin{aligned} p(10) &= \sum_{j=0}^n d_j 10^j = \sum_{j=0}^n d_j + \sum_{j=0}^n d_j (10^j - 1) \\ &= p(1) + 9 \sum_{j=0}^n d_j \frac{10^j - 1}{10 - 1} \\ &= p(1) + 9 \sum_{j=0}^n d_j \left(\sum_{i=0}^{j-1} 10^i \right) \end{aligned}$$

Also:

$$p(10) = p(1) + 9m, \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{X})$$

Daraus folgt unmittelbar die behauptete Äquivalenz, da $9m$ durch 3 teilbar ist. ✓

Anmerkung: $\frac{10^j - 1}{10 - 1} = \sum_{i=0}^{j-1} 10^i = 0, 1, 11, 111, \dots$ für $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

b) Beweis gleich wie für a) wegen des Faktors 9 in (X).

Der Begriff der *Relation* ist eine Art Verallgemeinerung des Abbildungsbegriffes. Mittels Relationen werden Elemente einer Menge X einander zugeordnet.

Mengentheoretisch betrachtet ist eine Relation eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $X \times X$. Wir betrachten hier den speziellen Typ einer *Äquivalenzrelation*, mittels derer Elemente von X miteinander identifiziert werden. Eine Äquivalenzrelation R ist durch folgende Eigenschaften definiert ($x, y, z \in X$):

- i) *Reflexivität*: Für jedes $x \in X$ ist $(x, x) \in R$.
- ii) *Symmetrie*: Mit $(x, y) \in R$ ist auch $(y, x) \in R$.
- iii) *Transitivität*: Falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$.

Für $(x, y) \in R$ schreibt man kurz $x \sim y$.

Eine *Partition* $\mathcal{P} = \{X_i, i \in I\}$ ist eine Unterteilung von X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen:¹

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad X_i \cap X_j = \{\} \text{ für } i \neq j, \quad X_i \neq \{\} \text{ für alle } i \in I.$$

Wir wollen zeigen, dass jede Äquivalenzrelation auf X einer Partition entspricht und umgekehrt.

- a) [L] Gegeben sei eine Partition \mathcal{P} . Zeigen Sie, dass durch

$$\exists i \in I: x \in X_i \text{ und } y \in X_i$$

eine Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf X definiert ist.

- b) [L] Gegeben sei eine Äquivalenzrelation \sim . Überlegen Sie, in welcher Weise diese eine Partition \mathcal{P} von X nach sich zieht.

- a) Wir überprüfen das Erfülltsein der Axiome für eine Äquivalenzrelation:

- i) *Reflexivität*: klar. ✓
- ii) *Symmetrie*: klar. ✓
- iii) *Transitivität*: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h.,
 $x, y \in X_i$ für genau ein $i \in I$ und $y, z \in X_j$ für genau ein $j \in I$

folgt $i = j$ und somit $x \sim z$. ✓

(Zur Erinnerung: Die X_i sind paarweise disjunkt.)

¹ Dabei ist I eine 'Indexmenge', z.B. $I = \{1, 2, \dots, n\}$ im Fall einer endlichen Partition in n Teilmengen, oder $I = \mathbb{N}$

b) Für jedes $x \in X$ definieren wir

$$[x] := \{z \in X : x \sim z\}$$

Behauptung:

$\mathcal{P} = \{[x] : x \in X\}$ ist eine Partition von X .

Beweis:

- Reflexivität von $\sim \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} [x]$ ✓
- Zu zeigen ist noch, dass für $x \neq y$ gilt $[x] \cap [y] = \{\}$ oder $[x] = [y]$.

Wir nehmen an $[x] \cap [y] \neq \{\}$. \Rightarrow

$$\exists z \in X : x \sim z \text{ und } y \sim z$$

Symmetrie von $\sim \Rightarrow$

$$\exists z \in X : x \sim z \text{ und } z \sim y$$

Transitivität von $\sim \Rightarrow$

$$x \sim y$$

Daher ist (wiederum aufgrund der Symmetrie und Transitivität) $x \sim z$ äquivalent zu $y \sim z$.

$\Rightarrow [x] = [y]$, was zu zeigen war. ✓

Anmerkung: Die Elemente einer Partition nennt man *Äquivalenzklassen*: Jedes $x \in X$ gehört genau einer Äquivalenzklasse an.

Sei $p \in \mathbb{N}$ gegeben. Für $x \in \mathbb{N}$ entspricht ganzzahlige Division durch p der Identität

$$x = kp + r \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \quad \text{und } r \in \mathbb{Z}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$$

Hier ist k der Quotient, und r ist der Rest.

Man sagt, dass $x, y \in \mathbb{N}$ in derselben *Restklasse modulo p* liegen, ‘ $x \equiv y \pmod{p}$ ’, falls gilt ¹

$$\exists k \in \mathbb{N}_0: x - y = \pm kp$$

Dies bedeutet, dass x und y denselben Rest r bei Division durch p haben.

a) [L] Zeigen Sie: Durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \equiv y \pmod{p}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{N} definiert. (Dies rechtfertigt die Terminologie ‘Restklasse modulo p ’.) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

b) [L] Die zu $x \in \mathbb{N}$ gehörige Restklasse $(\text{mod } p)$ bezeichnen wir mit $[x]$. Mit Restklassen kann man rechnen; z.B. definiert man die Addition durch

$$[x] + [y] := [x + y]$$

Diese Definition ergibt jedoch nur Sinn, wenn sie von dem gewählten ‘Repräsentanten’ x der Restklasse $[x]$ unabhängig ist, d.h., wenn eine andere Wahl $\tilde{x} \in [x] = [\tilde{x}]$ statt $x \in [x]$ (analog für $[y]$, $[x + y]$) an der Definition der Addition nichts ändert. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich zutrifft.

• Was sind die ‘natürlichen’, einfachsten Repräsentanten der p Restklassen?

a) Wir überprüfen das Erfülltsein der Axiome für eine Äquivalenzrelation:

i) *Reflexivität*: klar. ✓

ii) *Symmetrie*: klar. ✓

iii) *Transitivität*: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h.,

$$x - y = \pm kp \quad \text{und} \quad y - z = \pm \ell p$$

folgt

$$x - z = x - y + y - z = (\pm k \pm \ell)p = \pm mp \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}_0,$$

also gilt $x \sim z$. ✓

Die Äquivalenzklassen sind die Restklassen modulo p . Es gibt genau p Restklassen zu den möglichen Resten $r \in \mathbb{Z}_p$.

b) Seien $\tilde{x} \in [x]$ und $\tilde{y} \in [y]$ beliebig gewählt, also

$$\tilde{x} = x \pm k p, \quad \tilde{y} = y \pm \ell p$$

Dann gilt

$$[\tilde{x} + \tilde{y}] = [x + y \pm k p \pm \ell p] = [x + y \pm m p] = [x + y] \quad \checkmark$$

• Die Restklassen $(\text{mod } p)$ sind

$$[x] = [0], [1], [2], \dots, [p-1]$$

mit den einfachsten Repräsentanten $x = 0, 1, 2, \dots, p-1 \in \mathbb{Z}_p$. Für diese gilt $x = 0 \cdot p + r$, $r = x$.

Anmerkung: Die Operation $[x] + [y]$ entspricht der ‘Addition modulo p ’ im Sinne von $(x + y) \pmod{p}$, bei der das Ergebnis der Rest von $x + y$ nach Division durch p ist. Alles analog für die Multiplikation.

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}_0$ nennt man durch $t \in \mathbb{N}$ *teilbar*, falls gilt $a = kt$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist t (und auch k) ein *Teiler* von a .¹

Seien nun $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a > b$ gegeben. Division von a durch b mit Rest r entspricht der Identität²

$$a = qb + r, \quad q \in \mathbb{N}, \quad r \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad (\text{X})$$

Die Abbildung $(a, b) \mapsto r$ bezeichnet man auch als $r = a \bmod b$ (' a modulo b ').

- a) [L] Falls a und b durch ein $t \leq b$ teilbar sind, nennt man t einen gemeinsamen Teiler von a und b .

Zeigen Sie ausgehend von der Identität (X):

$$t \text{ gemeinsamer Teiler von } a \text{ und } b \iff t \text{ gemeinsamer Teiler von } b \text{ und } r$$

- b) [L] Den *größten gemeinsamen Teiler* von a und b bezeichnet man mit $\text{ggT}(a, b)$. Aus a) folgt

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$$

Auf dieser Identität beruht der *Euklid'sche Algorithmus* zur Berechnung von $\text{ggT}(a, b)$, bei dem die Primfaktorzerlegungen von a und b nicht benötigt werden:

```
[A, B] := [a, b]
while B ≠ 0 do
  [A, B] := [B, A mod B]
end while
```

Dann ist $\text{ggT}(a, b) = A$.

Argumentieren Sie, dass der Algorithmus immer terminiert und das korrekte Ergebnis liefert.

- c) [L] Berechnen Sie mithilfe des Euklid'schen Algorithmus $\text{ggT}(342, 54)$.

- a)
- Sei t gemeinsamer Teiler von a und b , $a = kt$ und $b = \ell t$. Mit (X) gilt nun

$$kt = q\ell t + r, \quad \text{also} \quad r = (k - q\ell)t$$

$$\Rightarrow t \text{ ist auch Teiler von } r.$$
 - Sei t gemeinsamer Teiler von b und r , $b = \ell t$ und $b = mt$. Mit (X) gilt nun

$$a = q\ell t + mt = (q\ell + m)t$$

$$\Rightarrow t \text{ ist auch Teiler von } a.$$

Daraus folgt die behauptete Äquivalenz. ✓

¹ Jedes $a \in \mathbb{N}$ ist durch $t = 1$ teilbar (trivialer Teiler).

b) Wir können den Algorithmus auch so anschreiben:

Sei $x_0 = a$ und $x_1 = b$. \rightsquigarrow

$$x_0 = q_0 x_1 + x_2, \quad 0 \leq x_2 < x_1,$$

$$x_1 = q_1 x_2 + x_3, \quad 0 \leq x_3 < x_2,$$

$$\vdots$$

$$x_n = q_n \cdot x_{n+1} + x_{n+2} = 1 \cdot 0 + x_n$$

Für die $x_j \geq 0$ gilt $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$, und daher $x_{n+1} = 0$ nach endlich vielen Schritten. Schließlich ist ³

$$x_n = \text{ggT}(x_n, 0) = \text{ggT}(a, b)$$

c) Wir rechnen:

$$342 = 6 \cdot 54 + 18$$

$$\swarrow \quad \swarrow$$

$$54 = 3 \cdot 18 + 0$$

$$\swarrow \quad \swarrow$$

$$18 = 1 \cdot 0 + 18$$

$\Rightarrow \text{ggT}(342, 54) = 18$. Zum Vergleich:

$$342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 = 18 \cdot 19$$

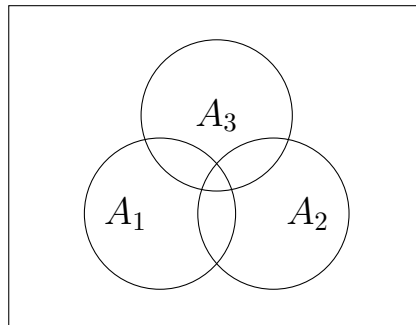
$$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \cdot 3$$

Dabei sind 19 und 3 'teilerfremd', d.h., $\text{ggT}(19, 3) = 1$.

Es seien Mengen A_1, \dots, A_n gegeben. Wir suchen nach einer alternativen Darstellung der Vereinigungsmenge $\bigcup_{k=1}^n A_k$ in Form einer 'Partition', d.h., einer Vereinigung paarweise disjunkter Mengen B_ℓ . Dazu definieren wir

$$B_\ell := A_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k, \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

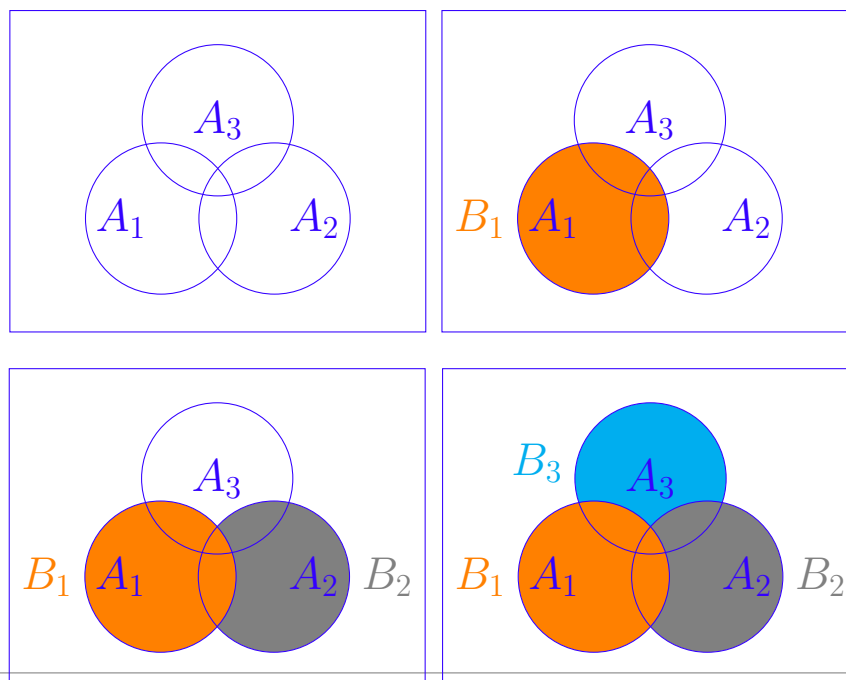
- a) [L] Visualisieren Sie die Konstruktion der Partition $\{B_1, \dots, B_n\}$ für $n = 3$ mithilfe sogenannter Venn-Diagramme, wie in der Abbildung:



- b) [L] Als Vorbereitung für c): Seien U, V, X, Y beliebige Mengen. Stellen Sie die Menge $(U \setminus X) \cap (V \setminus Y)$ in der Form $(\dots) \setminus (\dots)$ dar.
- c) [L] Zeigen Sie, dass die B_ℓ tatsächlich eine Partition bilden, d.h.,

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{\ell=1}^n B_\ell \quad \text{wobei} \quad B_\ell \cap B_m = \{\} \quad \text{für} \quad \ell \neq m.$$

- a) Visualisierung des Prozesses für $n = 3$ mittels Venn-Diagrammen:



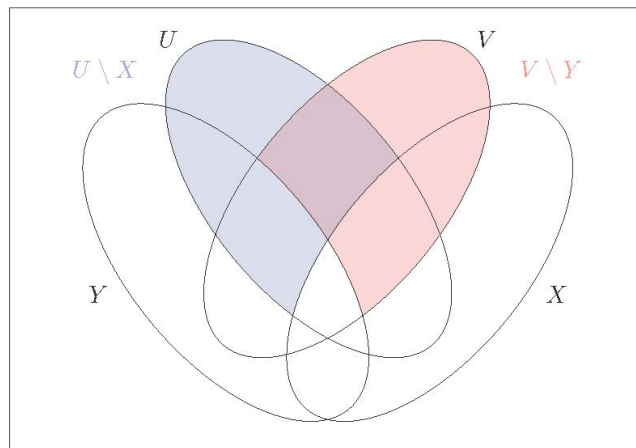
b) Es gilt

$$\begin{aligned}
 & x \in (U \setminus X) \cap (V \setminus Y) \\
 \Leftrightarrow & (x \in U \wedge x \notin X) \wedge (x \in V \wedge x \notin Y) \\
 \Leftrightarrow & (x \in U \wedge x \in V) \wedge (x \notin X \wedge x \notin Y) \\
 \Leftrightarrow & (x \in U \cap V) \wedge (x \notin X \cup Y)
 \end{aligned}$$

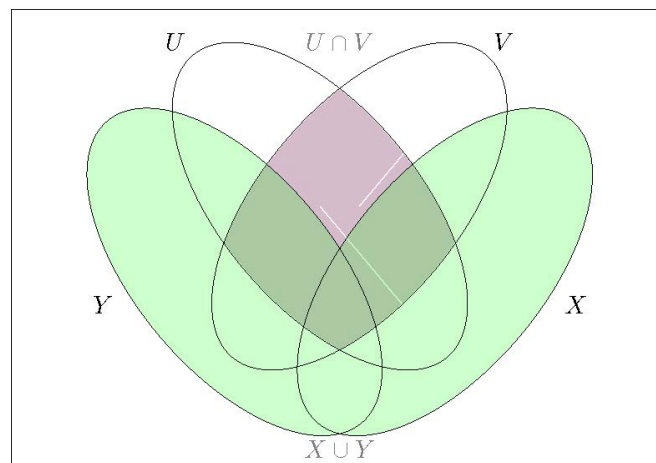
\Rightarrow

$$(U \setminus X) \cap (V \setminus Y) = (U \cap V) \setminus (X \cup Y)$$

Visualisierung:



$$(U \setminus X) \cap (V \setminus Y)$$



$$(U \cap V) \setminus (X \cup Y)$$

c) Zwei Aussagen sind zu zeigen:

$$\text{i) } A := \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{\ell=1}^n B_\ell =: B$$

\leadsto Laut Konstruktion gilt $B \subseteq A$.

Zu zeigen bleibt $A \subseteq B$. Wir gehen induktiv vor und betrachten alle möglichen Fälle für $x \in A$:

$$\begin{aligned} x \in A_1 &\Rightarrow x \in B_1 \\ x \notin A_1, \text{ jedoch } x \in A_2 &\Rightarrow x \in B_2 \\ x \notin A_1 \cup A_2, \text{ jedoch } x \in A_3 &\Rightarrow x \in B_3 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Dies zeigt $A \subseteq B$. ✓

ii) $B_\ell \cap B_m = \{ \}$ für alle $\ell \neq m$

\leadsto Sei o.B.d.A. $\ell < m$. Wir verwenden **b)**:

$$\begin{aligned} B_\ell \cap B_m &= \left(A_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k \right) \cap \left(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k \right) \\ &= \left(A_\ell \cap A_m \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k \right) \\ &\subseteq A_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k = \{ \} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

Für diejenigen Fälle, bei denen Injektivität, jedoch nicht Surjektivität vorliegt, modifizieren Sie die Definition so, dass f bijektiv wird, und geben auch die Umkehrfunktion an.

a) [L] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + k$ mit festem $k \in \mathbb{N}$

b) [L] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ gerade} \\ n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

c) [L] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \sum_{k=1}^n k$

d) [L] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n^2 - 6n + 8$

a) $f(n) = n + k$

- injektiv:

Für $m \neq n$ gilt $f(m) \neq f(n)$.

- nicht surjektiv:

Es gilt $f(n) > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $0, 1 \notin f(\mathbb{N})$.

- f ist bijektiv, aufgefasst als Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \{m \in \mathbb{N}: m > k\}$.

Umkehrfunktion: $f^{-1}(m) = m - k$

b) $f(n) = \begin{cases} n = 2k, & n = 2k \text{ gerade} \\ n + 1 = 2(k + 1), & n = 2k + 1 \text{ ungerade} \end{cases}$

n	1	2	3	4	5	6	...
$f(n)$	2	2	4	4	6	6	...

- nicht injektiv:

Für gerade n gilt $f(n - 1) = f(n)$.

- nicht surjektiv:

Ungerade Zahlen treten nicht als Funktionswerte auf.

$$\mathbf{c)} \quad f(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- injektiv:

Für $m < n$ gilt $f(m) < f(n)$.

- nicht surjektiv:

Alle Funktionswerte sind ungerade.

- f ist bijektiv, aufgefasst als Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \left\{ \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Umkehrfunktion: Diese entspricht der positiven Lösung n der Gleichung $f(n) = m$:

$$n = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8m} - 1) = f^{-1}(m)$$

$$\mathbf{d)} \quad f(n) = n^2 - 6n + 8 = (n-2)(n-4)$$

n	1	2	3	4	≥ 5
$f(n)$	3	0	-1	0	> 0

- nicht injektiv:

Es gilt $f(2) = f(4) = 0$.

- nicht surjektiv:

Der einzige negative Funktionswert ist $-1 = f(3)$. Es werden auch nicht alle $m \in \mathbb{N}$ als Funktionswert angenommen, z.B. $m = 1$.