Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

a) [L] $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$

b) [L] $a_n = \frac{n!}{n^{n-1}}$

c) [L] $a_n = \left(\frac{n+1}{n^2+3\,n}\right)^2$

d) [L] $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

e) [L] $a_n = \frac{(c\,n)^n}{n!}$ (in Abhängigkeit von $c > 0$)

Anmerkung: Hier gibt es einen Grenzfall. Um diesen zu entscheiden, können Sie folgende (hier nicht bewiesene) Aussage verwenden: Es gibt eine Konstante $C > 1$ mit [1]

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^n} \leq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \tag{X}$$

---

a) Quotientenkriterium $\rightsquigarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n!}}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert.

---

b) Quotientenkriterium $\rightsquigarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^{n-1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to 1/e} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-2}}_{\to 1} \to \frac{1}{e} < 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert.

$\longrightarrow$

[1] C ist nahe an 1, aber das tut hier nichts weiter zur Sache.

c) Majorantenkriterium $\rightsquigarrow$

$$\frac{n+1}{n^2+3\,n} \le \frac{1}{n}\,\frac{n+1}{n+3} \le \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergente Majorante

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert.

d) Die Reihenglieder bilden keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Die Reihe divergiert.

X) Quotientenkriterium $\rightsquigarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(c\,(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(c\,n)^n}{n!}} = c\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to c\,e \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe

- konvergiert für $c < 1/e$
- divergiert für $c > 1/e$

Für $c = 1/e$ liefert das Quotientenkriterium keine Entscheidung. Mit Hilfe der Ungleichung (X) findet man eine divergente Minorante:

$$a_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \ge \frac{1}{C\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Anmerkung: (X) ist verwandt zur **Stirlingschen Formel**, die das asymptotische Verhalten von $n!$ für $n \to \infty$ charakterisiert:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

a) [L] $a_n = \left((1+\frac{1}{n})x\right)^n$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

b) [L] $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

c) [L] $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

---

a) Wurzelkriterium $\rightsquigarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)|x| \to |x|$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$. Andernfalls divergiert sie (auch für $|x| = 1$, da die Reihenglieder hier keine Nullfolge bilden).

---

b) Minorantenkriterium $\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergente Minorante.

Die Reihe divergiert.

---

c) Leibniz-Kriterium $\rightsquigarrow$

- Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0 \quad \checkmark$$

- Monotonie:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}\,(n+1)}{\sqrt{n}\,(n+2)} = \sqrt{\frac{(n+1)^3}{n\,(n+2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^3+3\,n^2+3\,n+1}{n^3+3\,n^2+3\,n+n^2+n}} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Die Konvergenz ist bedingt, jedoch nicht absolut.

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{2\,n+1}\right)^n$

a) [L] Entscheiden Sie, ob Reihe konvergiert, und geben Sie im Fall der Konvergenz (experimentell, also mit Rechnerunterstützung) ein möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle $k \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq 10^{-3}$$

b) [L] Entscheiden Sie, ob die Reihe absolut konvergiert.

---

a) Alternierende Reihe mit $a_n = (-1)^n\,|a_n| \quad \rightsquigarrow \quad$ Leibniz-Kriterium:

- Die positive Folge $(|a_n|)$ ist eine Nullfolge. ✓
- Wir zeigen, dass $(|a_n|)$ monoton fallend ist:

Setze $b_n = \frac{n+1}{2\,n+1}$. Wir zeigen zunächst

$$b_{n+1} < b_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+2}{2\,(n+1)+1} < \frac{n+1}{2\,n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+2)(2\,n+1) \leq (n+1)(2\,n+3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{2\,n^2 + 5\,n} + 2 \leq \cancel{2\,n^2 + 5\,n} + 3 \quad ✓$$

$\Rightarrow$

$$a_{n+1} = b_{n+1}^{n+1} < b_{n+1}^{n} < b_n^n = a_n$$

(a_n) ist (strikt) monoton fallend. ✓

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent.

- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq |a_{k+1}|$$

$\Rightarrow$ Abbruchfehler $\leq 10^{-3}$ für

$$k \geq N \quad \text{mit} \quad |a_{N+1}| = \left(\frac{N+2}{2\,N+3}\right)^N \leq 10^{-3}$$

Ausprobieren am Rechner ergibt $N = 11$.

⟶

b) Absolute Konvergenz ? $\rightsquigarrow$ Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+1}{2\,n+1} \to \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent.

Anmerkung: Dies ist so zu interpretieren, dass sich die Reihe asymptotisch wie eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ verhält. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=N}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2} + \varepsilon\right)^n$$

Berechnen Sie die Werte folgender konvergenter Reihen:

a) [L]

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n\,(n+2)}\right)$$

b) [L]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\,n^3+6\,n^2+4\,n+1}{n^4\,(n+1)^4}$$

Hinweis: Schauen Sie sich den Zähler genau an.

---

a) Teleskopreihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n\,(n+2)}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)(n+1)}-\frac{1}{n\,(n+2)}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right),\quad \text{mit}\quad a_n=\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$\Rightarrow$ wegen $a_n\to 0$ für $n\to\infty$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n\,(n+2)}\right)=\left(a_2-a_3\right)+\left(a_3-a_4\right)+\ldots$$

$$=a_2=\frac{1}{3}$$

---

b) Zähler: $4\,n^3+6\,n^2+4\,n+1=(n+1)^4-n^4$

$\Rightarrow$ Teleskopreihe (mit $1/n^4\to 0$ für $n\to\infty$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\,n^3+6\,n^2+4\,n+1}{n^4\,(n+1)^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4-n^4}{n^4\,(n+1)^4}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{(n+1)^4}\right)=\left(1-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}\right)+\ldots=1$$

Es bezeichne $p_n > 0$ die Größe einer Population zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ (man stelle sich z.B. vor, $n \to n+1$ entspricht einem Jahr). Beginnend mit $p_1 = 1$ entwickelt sich die Population wie folgt: In jedem Jahr stirbt die Hälfte aus, aber ein fixer Anteil $c > 0$ kommt jeweils dazu (durch Immigration).

a) [L] Geben Sie für die p_n eine Rekursionformel an.

b) [L] Geben Sie für die p_n eine explizite Darstellung an.
Hinweis: ein bisschen rechnen, und dann ... eh klar.

c) [L] Studieren Sie das asymptotische Verhalten der p_n für $n \to \infty$ in Abhängigkeit von dem Parameter c

(i) unter Verwendung der Darstellung aus **b)**,

(ii) ohne Bezugnahme auf **b)**.

---

a) Die Rekursionsformel: $p_1 = 1$, und

$$p_n = \tfrac{1}{2}\, p_{n-1} + c \quad \text{für} \quad n > 1$$

---

b) Rechnen:

$$\begin{aligned}
p_2 &= \tfrac{1}{2}\, p_1 + c = \tfrac{1}{2} + c \\
p_3 &= \tfrac{1}{2}\, p_2 + c = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2} + c\big) + c = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}\, c \\
p_4 &= \tfrac{1}{2}\, p_3 + c = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}\, c\big) + c = \tfrac{1}{8} + \tfrac{7}{4}\, c
\end{aligned}$$

usw.

$\rightsquigarrow$ Offenbar gilt

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\, c$$

Beweis mittels vollständiger Induktion ($n = 1$ ist ✓):

Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\, p_n + c \overset{\text{IND}}{=} \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\, c\Big) + c \\
&= \frac{1}{2^n} + \Big(1 + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\Big) c = \frac{1}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\, c \quad ✓
\end{aligned}$$

⟶

c) (i) Es gilt

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \to 2 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Für jedes $c > 0$ konvergiert die Population gegen den Wert $p_\infty = 2\,c$ für $n \to \infty$.

(ii) Die Rekursion aus **a)** hat die Gestalt

$$p_n = \tfrac{1}{2}\,p_{n-1} + c = f(p_{n-1}), \quad \text{mit} \quad f(p) = \tfrac{1}{2}\,p + c \;\; \text{stetig}$$

$\Rightarrow$ *Falls* die Folge (p_n) gegen einen Wert p_∞ konvergiert, muss gelten

$$p_\infty = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} f(p_{n-1}) = f\Big(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\Big) = f(p_\infty)$$

$\Rightarrow$

$$p_\infty = \tfrac{1}{2}\,p_\infty + c \quad \Rightarrow \quad p_\infty = 2\,c \quad \checkmark$$

Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir die Rekursion für die Folge $(p_n - p_\infty)$:

$$\begin{aligned} p_n - p_\infty &= \tfrac{1}{2}\,p_{n-1} + c - 2\,c \\ &= \tfrac{1}{2}\,(p_{n-1} - p_\infty) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(p_n - p_\infty)$ ist eine geometrische (exponentiell konvergente) Nullfolge. $\checkmark$

Das war einfacher als die Rechnung aus **b)**.

Anmerkung: Aus (ii) folgt auch:

- Für $c < \frac{1}{2}$ nimmt die Population ab und konvergiert gegen $2\,c$.
- Für $c = \frac{1}{2}$ bleibt die Population konstant $\equiv 1 = 2\,c$.
- Für $c > \frac{1}{2}$ nimmt die Population zu und konvergiert gegen $2\,c$.

$\square$

Sei (a_n) eine positive, monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty \tag{X}$$

a) [L] Beweisen Sie '⇒'.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen der rechten Seite von (X), 'blocken' Sie diese in geeigneter Weise und schätzen Sie mit Hilfe der Monotonie der a_n so nach oben ab, dass sich die linke Seite von (X) als Majorante ergibt. Verwenden Sie '$+\ldots+$'-Notation.

b) [L] Beweisen Sie '⇐'.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen der linken Seite von (X), 'blocken' Sie diese in geeigneter Weise (etwas anders als in **a)**) und schätzen Sie mit Hilfe der Monotonie der a_n so nach oben ab, dass sich die rechte Seite von (X) als Majorante ergibt. Verwenden Sie '$+\ldots+$'-Notation.

c) [L] Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert.

Das Kriterium (X) ist als **Cauchy'scher Verdichtungssatz** bekannt.

a) Annahme: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Wir betrachten die Partialsummen der rechten Seite von (X) und schätzen ab mit Hilfe der Monotonie der a_n:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} &= a_1 + (2\,a_2) + (4\,a_4) + (8\,a_8) + \ldots + (2^K a_{2^K}) \\
&\leq (a_1) + (2\,a_2) + (2\,a_3 + 2\,a_4) + (2\,a_5 + 2\,a_6 + 2\,a_7 + 2\,a_8) + \ldots \\
&\qquad + (2\,a_{2^{K-1}} + \ldots + 2\,a_{2^K}) \\
&= -a_1 + 2\sum_{n=1}^{2^K} a_n < 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Annahme: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Wir betrachten die Partialsummen der linken Seite von (X) und schätzen ab mit Hilfe der Monotonie der a_n; dabei sei $K \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $N \leq 2^{K+1} - 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + a_N \\
&\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + a_{2^{K+1}-1} \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + \\
&\qquad + (a_{2^K} + \ldots + a_{2^{K+1}-1}) \\
&\leq a_1 + (2\, a_2) + (4\, a_4) + \ldots + 2^K a_{2^K} \\
&= \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

c) Die Folge der Summanden $1/n^\alpha$ ist positiv und monoton fallend.

Wir überprüfen die Konvergenz der 'verdichteten Reihe', d.h., der rechten Seite von (X). Dies führt für $\alpha > 1$ auf eine konvergente geometrische Reihe (beachte $2^{1-\alpha} < 1$) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\, 2^{-\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} < \infty \qquad \checkmark$$

Für eine gegebene nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$d_A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

a) [L] Interpretieren Sie diese Definition und geben Sie der Funktion d_A einen Namen.

b) [L] Geben Sie die Funktion $d_{[0,1]}$ explizit an und zeichnen Sie ihren Graphen. Ist $d_{[0,1]}$ stetig?

c) [L] Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{(0,1)}$.

d) [L] Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{\{0,1\}}$.

e) [L] Zeigen Sie:

Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ unbeschränkt.

f) [L] Ist auch die folgende Aussage wahr?

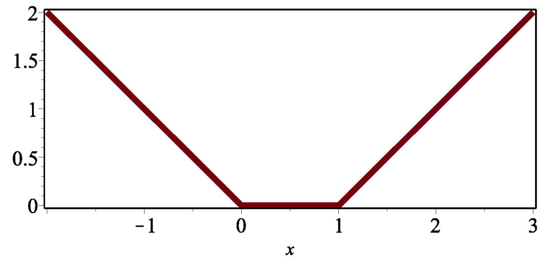
Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ beschränkt.

---

a) $d_A(x) =$ Abstand von x zu A

b) $d_{[a,b]}$ ist stetig für beliebige $[a, b]$. Z.B.:

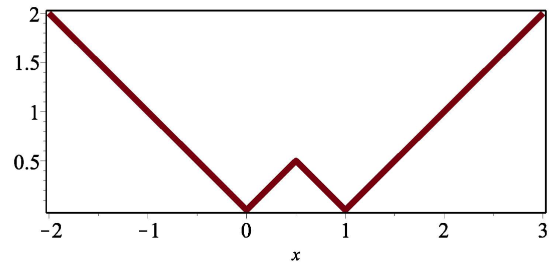
$$d_{[0,1]}(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le 1, \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$



c) $d_{(0,1)}(x) = d_{[0,1]}(x)$

d) $d_{\{a,b\}}$ ist stetig für beliebige a, b. Z.B.:

$$d_{\{0,1\}}(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



e) $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt: $|x| \leq M$ für alle $x \in A$

$\Rightarrow$ Für $|x| > M$ ist

$$d_A(x) \;>\; |x| - M \;\to\; \infty \quad \text{für} \;\; x \to \infty$$

$\Rightarrow$ $d_A(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ ✓

f) Falsch. Gegenbeispiel: $A = [0, \infty)$, mit $d_A(x) = -x$ für $x < 0$.

a) [L] Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(2\,x) = f(x) \quad \text{für alle } x > 0$$

Zeigen Sie: Falls f stetig ist, muss f konstant sein.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen der Form $x_n = 2^{-n}\,x$.

b) [L] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine additive Funktion, d.h., es gelte

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie: Falls f an der Stelle $x = 0$ stetig ist, dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Funktionswert $f(0)$.

---

a) Sei $x > 0$ beliebig. Für die Nullfolge (x_n) mit $x_n = 2^{-n}x$ gilt

$$f(x_1) = f(x/2) = f(x)$$

$$f(x_2) = f(x_1/2) = f(x_1) = f(x)$$

usw.

$$\Rightarrow \quad f(x_n) \equiv f(x) = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ wegen $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und mit der Stetigkeit von f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(0)$$

$\Rightarrow$ $f(x) \equiv f(0) = \text{const.}$ ✓

---

b) Zunächst gilt

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \big(f(x) + f(h)\big) = f(x) + \lim_{h\to 0} f(h)$$

f wurde als stetig an der Stelle $x = 0$ angenommen, d.h.,

$$\lim_{h\to 0} f(h) = f\Big(\lim_{h\to 0} h\Big) = f(0) = 0$$

$\Rightarrow$ f ist stetig an jeder Stelle x.

Gegeben seien die drei Funktionen

$$f(x) = \frac{(x-3)\,(x-2)\,(x-1)}{x^2 - 3\,x + 2}\,, \quad g(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\,, \quad h(x) = \frac{x^3}{|x^3| + x^4}$$

a) [L] Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die obigen Funktionen definiert?

b) [L] Welche der Funktionen können mittels stetiger Fortsetzung zu stetigen, auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen erweitert werden?

---

a)

- Es gilt $x^2 - 3\,x + 2 = (x-2)\,(x-1)$

  $\Rightarrow \quad f(x)$ ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

  Für $x \in \{1, 2\}$ ergibt sich '0/0'.

- $g(x)$ ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  Für $x = 0$ ergibt sich '0/0'.

- Es gilt $x^4 + |x^3| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

  $\Rightarrow \quad h(x)$ ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  Für $x = 0$ ergibt sich '0/0'.

---

b)

- Für $x \notin \{1, 2\}$ ist (siehe **a)**)

$$f(x) \;=\; \frac{(x-3)\,(x-2)\,(x-1)}{(x-2)\,(x-1)} \;=\; x - 3\,,$$

und $x - 3$ ist wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiters gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) \;=\; 1 - 3 = -2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \;=\; 2 - 3 = -1$$

$\Rightarrow \quad f(x) \;=\; x - 3$ ist die stetige Fortsetzung der ursprünglich gegebenen Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$.

⟶

- Wir berechnen den Limes der Funktionswerte für $x \to 0$ mittels algebraischer Umformung:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\,\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(x+1)}{x\,(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ ist stetig fortsetzbar an der Stelle $x = 0$, und die stetige Fortsetzung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

- Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{x^3+x^4} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x^3}{-x^3+x^4} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{-1+x} = -1$$

$\Rightarrow$ $h(x)$ lässt sich nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Eine Funktion $f(x)$ sei als Grenzwert einer von x abhängigen Folge, d.h., einer Folge von Funktionen $f_n(x)$ definiert:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Konkret betrachten wir :

a) [L]
$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n+1}, \quad x \geq 0$$

b) [L]
$$f_n(x) = n\, x^n\,(1-x), \quad x \in [0,1]$$

Diskutieren Sie für beide Fälle **a)**, **b)**

- die Konvergenz der Folgen $(f_n(x))$ in Abhängigkeit von x,
- die Existenz der Grenzfunktion $f(x)$ und deren Stetigkeit.

Hinweis zu **b)**: Um das Verhalten von $f_n(x)$ zu studieren, betrachten Sie die Rekursion $f_{n+1}(x) = (\cdots)\, f_n(x)$ und verwenden das Einschließungsprinzip.

Fortsetzung von **b)** :

c) [L] Sei $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Berechnen Sie den Grenzwert von $f_n(x_n)$ für $n \to \infty$. Was beobachten Sie?

d) [L] Entscheiden Sie, für welche $x \in [0,1]$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert.

---

a) Für $n \to \infty$ gilt

$$x^n \to \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

- $x \in [0,1)$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

- $x = 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

- $x > 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Die Folge $(f_n(x))$ konvergiert für alle $x \geq 0$.

Die Grenzfunktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ist unstetig an der Stelle $x = 1$.

---

b)

- $x = 0:\; f_n(0) \equiv 0$
- $x \in (0,1):$ Es gilt

$$f_{n+1}(x) \;=\; \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)x\, f_n(x)$$

wobei $\big(1 + \frac{1}{n}\big)x \le q < 1$ für hinreichend große $n \quad \Rightarrow$

$$f_{n+1}(x) \;\le\; q^n f_1(x) \;=\; q^n x(1-x) \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

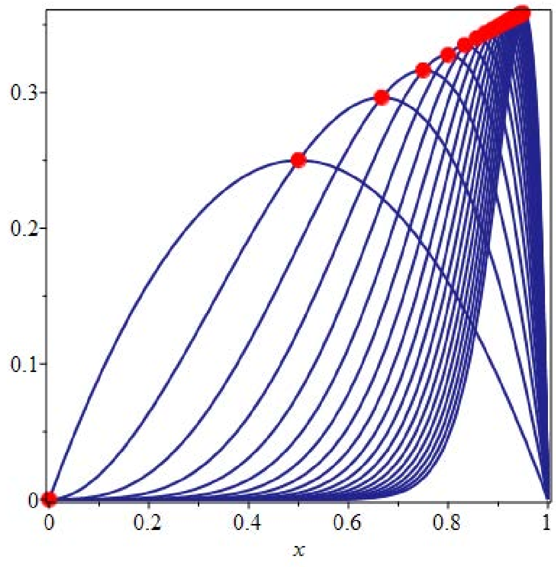
$\Rightarrow\; (f_n(x))$ ist Nullfolge (Einschließungsprinzip).

- $x = 1:\; f_n(1) \equiv 0$

$\rightsquigarrow$ Grenzfunktion:

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1]$$

Anmerkung: Für $x \to 1$ tritt die Konvergenz von $f_n(x)$ gegen 0 ‘immer später’ ein. Die Abbildung zeigt den Verlauf der Funktionen f_n für $n = 1 \ldots 20$. Eingezeichnet sind auch die Werte $f_n(x_n)$ (siehe **c)**).



c) Für $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Dieser Grenzwert ist nicht 0, obwohl $f_n(x) \to 0$ für jedes feste x.

d) Die Überlegung aus **b)** zeigt, dass für alle $x \in (0,1)$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ aufgrund des Quotientenkriteriums konvergiert.

(Für $x = 0,\ x = 1$ ist nichts zu zeigen.)