Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 14. November 2006

Gruppe rot, mit Lösung

↑ **Name** (Blockbuchstaben)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Sollten Sie die Blattrückseite verwenden, schreiben Sie bitte unten rechts "%"

1. Gegeben ist die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   a) Geben Sie den normalisierten Tangentenvektor $\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ an.
   b) Berechnen Sie $\mathbf{b}(t) := \mathbf{a}'(t)$ und zeigen Sie, daß $\mathbf{b}(t)$ senkrecht auf $\mathbf{a}(t)$ steht.
   c) Bestimmen Sie einen dritten Vektor $\mathbf{c}(t)$, der senkrecht auf $\mathbf{a}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ steht.
   d) Was ist der Flächeninhalt des von $\mathbf{a}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ aufgespannten Parallelogramms?
2. Gegeben sind 2 Ebenen mit den Gleichungen $x + y + z = 0$ und $2x + 5y + 7z = 0$. Geben Sie die Schnittgerade in der Form $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$ an.

LÖSUNG

1. a) $\mathbf{r}'(t) = 2\,(-\sin(2t), \cos(2t), 1)$ (Kettenregel), mit $|\mathbf{r}'(t)|^2 = 4\,(\sin^2(2t)+\cos^2(2t)+1) \equiv 8$. Also:
   $\mathbf{a}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(-\sin(2t), \cos(2t), 1)$
   b) $\mathbf{b}(t) := \mathbf{a}'(t) = \sqrt{2}\,(-\cos(2t), -\sin(2t), 0)$, mit
   $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = sc - cs + 0 = 0$ $\quad (c := \cos(2t),\ s := \sin(2t))$
   c) Äußeres Vektorprodukt: $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   $$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -s \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -c \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -c \\ 1 \end{pmatrix}$$
   d) Der Flächeninhalt ist gleich $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = \sqrt{s^2 + c^2 + 1} = \sqrt{2}$ für beliebige t. (Tatsächlich handelt es sich um ein Rechteck, weil $\mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$.)
2. Die beiden Gleichungen sind l.u. und haben eine eindimensionale Lösungsschar (= Schnittgerade). Mit der Wahl $x = 2t$ erhalten wit für y, z die Gleichungen $y + z = -2t$, $5y + 7z = -4t$, mit der eindeutigen Lösung $y = -5t$, $z = 3t$. Daher: Schnittgerade
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -5t \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: eher leicht, aber einige Rechenarbeit.