Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

3. Test am 28. November 2006

Gruppe grün, mit Lösung

↑ **Name** (BLOCKBUCHSTABEN)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Sollten Sie die Blattrückseite verwenden, schreiben Sie bitte unten rechts "%"

Zu bestimmen sei das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(x,y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5x^4 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C, die die beiden Punkte $\boldsymbol{r}_1 = (0,-4)$ und $\boldsymbol{r}_2 = (-2,0)$ verbindet, wobei sich C aus dem Geradenstück von $\boldsymbol{r}_1$ nach $(0,0)$ und aus dem Geradenstück von $(0,0)$ nach $\boldsymbol{r}_2$ zusammensetzt.

Man führe die Berechnung durch

a) in direkter Weise entlang von C,

b) mit Hilfe eines Potentials von $\boldsymbol{F}$.

c) Wie lautet der Wert des Kurvenintegrals entlang des Ellipsenbogens (Halbachsen parallel zu den Koordinatenachsen), der von $\boldsymbol{r}_2$ nach rechts unten zurück bis $\boldsymbol{r}_1$ verläuft?

LÖSUNG

a) Parametrisierung der beiden Geradenstücke, Tangentialvektor $\boldsymbol{r}'(t)$ und $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$:

$$C_1: \quad \boldsymbol{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t-4 \end{pmatrix}, \ t = 0\ldots 4; \quad \boldsymbol{r}_1{}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(t)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 3(t-4)^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2: \quad \boldsymbol{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}, \ t = 0\ldots 2; \quad \boldsymbol{r}_2{}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(t)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5t^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=0}^{4} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(t))\cdot \boldsymbol{r}_1'(t)\,dt + \int_{t=0}^{2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(t))\cdot \boldsymbol{r}_2'(t)\,dt = \ldots = 8$$

b) Es gilt $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(x,y) = \nabla E(x,y)$, mit Potential $E(x,y) = \frac{1}{4}(x^5 + y^3)$

$\Rightarrow \quad \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = E(-2,0) - E(0,-4) = 8$

c) Ellipsenbogen ergänzt C zu einer geschlossenen Kurve, Integral über geschlossene Kurve $= 0$; bzw. Wegunabhängigkeit von $\int_C \nabla E \cdot d\boldsymbol{r}$

$\Rightarrow$ Integral über Ellipsenbogen $= -8$.

Bewertung: eher leicht, Routinerechnung.