Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

4. Test am 13. Dezember 2006

Gruppe grün, mit Lösung

↑ **Name** (Blockbuchstaben)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Sollten Sie die Blattrückseite verwenden, schreiben Sie bitte unten rechts "%"

Im $\mathbb{R}^2$ sei das Skalarfeld $\rho(x,y) = x^2 + y^2$ gegeben. Weiters sei K der im Ursprung zentrierte Kreissektor mit Radius R und Innenwinkel $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$. Man berechne des Flächenintegral

$$\int_K \rho(x,y)\psi(x,y)\, d(x,y)\,,$$

wobei $\psi(x,y) > 0$ den von den Vektoren $\nabla\rho(x,y)$ und $(1,0)$ eingeschlossenen spitzen Winkel bezeichne.

LÖSUNG

$\rho(x,y) = x^2 + y^2$, $\nabla\rho(x,y) = (2x, 2y)$ $\Rightarrow$ (!) $\psi(x,y) \equiv \varphi$, wobei $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (Polarkoordinaten), und $\rho(x,y) = r^2$

Darstellung des Integrals in in Polarkoordinaten ergibt

$$I = \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} r^2\,\varphi\, \overset{\downarrow}{r}\, dr\, d\varphi \quad \text{(Funktionaldeterminante} = r)$$

Also

$$I = \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\, d\varphi \cdot \int_{r=0}^{R} r^3\, dr = \frac{\varphi^2}{2}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{R} = \ldots = \frac{3\,(R^2\pi)^2}{128}\,.$$

Bewertung: eher leicht.