Institut für Analysis und Scientific Computing WS 2006/07
TU Wien

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

5. Test am 24. Januar 2007

Gruppe grün, mit Lösung

↑ **Name** (BLOCKBUCHSTABEN)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Die Gleichung

$$v^2 + 2\,\beta\,u\,v - u^2 \;=\; 1$$

beschreibt für jeden Wert des Parameters β eine Hyperbel in der (u,v)-Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)$. Der untere Zweig dieser Hyperbel lässt sich in der Form $v = v(u)$ parametrisieren. (Der obere auch, aber das ist hier egal.)

a) Man leite für diese Parametrisierung $v = v(u)$ eine exakte Differentialgleichung

$$p(u,v)\,du + q(u,v)\,dv \;=\; 0 \tag{1}$$

her. Wie lauten $p(u,v)$ und $q(u,v)$? Für welchen Wert von β ist diese Differentialgleichung separabel (Begründung)?

b) Man zeige: Mit der Matrix

$$B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Funktion

$$I(u,v) \;=\; (B\cdot\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}$$

ein erstes Integral von (1). (Dabei bezeichnet $\boldsymbol{u}$ den Vektor (u,v).)

Hinweis: Auflösen der Hyperbelgleichung nach v liefert zwar die Lösung $v(u)$ der gesuchten Differentialgleichung, aber das ist hier nicht die Frage.

Machen Sie keine Skizze, das bringt hier nicht viel.

LÖSUNG

a) Für $v = v(u)$ gilt $\varphi(u,v(u)) = v^2 + 2\,\beta\,u\,v - u^2 - 1 \equiv 0$, also [Kettenregel]:

$$0 \;\equiv\; \frac{d}{du}\,\varphi(u,v(u)) = \varphi_u + \varphi_v\,v' \;=\; 2(-u+\beta\,v) + 2(\beta\,u+v)\,v',$$

also exakte DGL. $p(u,v)du + q(u,v)dv \equiv 0$, mit

$$p(u,v) = -u + \beta\,v, \quad q(u,v) = \beta\,u + v\,.$$

Separabilität liegt vor für $\beta = 0$ ($p(u,v) = -u$ ua. von v, $q(u,v) = v$ ua. von u).

b) Dies folgt unmittelbar aus $(B\cdot\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u} \;=\; v^2 + 2\,\beta\,u\,v - u^2$.

Bewertung: so gut wie nichts zu rechnen (man muss nur die Begriffe kennen).