Institut für Analysis und Scientific Computing WS 2006/07
TU Wien

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

5. Test am 24. Januar 2007

Gruppe weiß, mit Lösung

↑ **Name** (Blockbuchstaben)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Die Gleichung

$$x^2 + 2\,\alpha\,x\,y + y^2 \;=\; 1$$

beschreibt für jeden Wert des Parameters $\alpha \in (-1, 1)$ eine Ellipse in der (x, y)-Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0)$. In der Nähe von $x = 0$, d.h. in der Nähe der y-Achse, lässt sich der obere Abschnitt dieser Ellipse in der Form $y = y(x)$ parametrisieren. (Der untere auch, aber das ist hier egal.)

a) Man leite für diese Parametrisierung $y = y(x)$ eine exakte Differentialgleichung

$$p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy \;=\; 0 \tag{1}$$

her. Wie lauten $p(x, y)$ und $q(x, y)$? Für welchen Wert von α ist diese Differentialgleichung separabel (Begründung)?

b) Man zeige: Mit der Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Funktion

$$I(x, y) \;=\; (A \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}$$

ein erstes Integral von (1). (Dabei bezeichnet $\boldsymbol{x}$ den Vektor (x, y).)

Hinweis: Auflösen der Ellipsengleichung nach y liefert zwar die Lösung $y(x)$ der gesuchten Differentialgleichung, aber das ist hier nicht die Frage.

Machen Sie keine Skizze, das bringt hier nicht viel.

LÖSUNG

a) Für $y = y(x)$ gilt $\varphi(x, y(x)) = x^2 + 2\,\alpha\,x\,y + y^2 - 1 \equiv 0$, also [Kettenregel]:

$$0 \;\equiv\; \frac{d}{dx}\,\varphi(x, y(x)) = \varphi_x + \varphi_y\,y' \;=\; 2(x + \alpha\,y) + 2(\alpha\,x + y)\,y',$$

also exakte DGL. $p(x, y)dx + q(x, y)dy \equiv 0$, mit

$$p(x, y) = x + \alpha\,y, \quad q(x, y) = \alpha\,x + y\,.$$

Separabilität liegt vor für $\alpha = 0$ ($p(x, y) = x$ ua. von y, $q(x, y) = y$ ua. von x).

b) Dies folgt unmittelbar aus $(A \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} \;=\; x^2 + 2\,\alpha\,x\,y + y^2$.

Bewertung: so gut wie nichts zu rechnen (man muss nur die Begriffe kennen).