Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Haupttest (25. Januar 2008)

Gruppe blau (*mit Lösung*)

— — *kein Taschenrechner; Skriptum erlaubt* — —

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18):*		

Beispiel 1.

Durch die beiden gewöhnlichen DGLen (mit Anfangswerten)

$$x'(\sigma) \;=\; 1 - x(\sigma)\,, \quad x(0) = 0, \qquad \text{und} \qquad y'(\sigma) \;=\; \frac{y(\sigma)}{3}\,, \quad y(0) = 1,$$

sei eine ebene Kurve $\boldsymbol{r}(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma))$ festgelegt.

a) Man zeige

$$\boldsymbol{r}(\sigma) \;=\; \begin{pmatrix} 1 - e^{-\sigma} \\ e^{\sigma/3} \end{pmatrix},$$

indem man die Lösungen der gegebenen Anfangswertprobleme explizit berechne.

b) Man berechne

$$\int_C dx$$

entlang des Kurvenabschnittes C von $\sigma = 0 \ldots 2$.

c) Ein Massepunkt bewege sich entlang der Kurve, wobei die Dynamik der Bewegung dadurch beschrieben wird, dass der Kurvenparameter σ als Funktion der Zeit t vorgegeben ist:

$$\sigma(t) \;=\; t^3 \qquad (\text{Start bei } t = 0.)$$

Man berechne den Betrag der Geschwindigkeit des Massepunktes zum Zeitpunkt $t = 1$, ohne die Formel $\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(\sigma(t))$ für die Bahnkurve explizit aufzustellen. (Kettenregel!)

LÖSUNG

a) Lösung der gegebenen Anfangswertprobleme für $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ ergibt genau

$$\boldsymbol{r}(\sigma) \;=\; \begin{pmatrix} x(\sigma) \\ y(\sigma) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 - e^{-\sigma} \\ e^{\sigma/3} \end{pmatrix}$$

(elementare Rechnung).

b) Auswertung des Kurvenintegrals:

$$\int_C dx \;=\; \int_{\sigma=0}^{2} 1 \cdot x'(\sigma)\, d\sigma \;=\; \int_{\sigma=0}^{2} e^{-\sigma}\, d\sigma \;=\; -\,e^{-\sigma}\Big|_{\sigma=0}^{2} \;=\; 1 - \frac{1}{e^2}\,.$$

c) Verwendung der Kettenregel ergibt für $\tilde{\boldsymbol{r}}(t) \;=\; \boldsymbol{r}(\sigma(t))$:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}(\sigma(t)) \;=\; \frac{d}{d\sigma}\,\boldsymbol{r}(\sigma(t))\,\frac{d}{dt}\,\sigma(t) \;=\; 3\,t^2 \begin{pmatrix} e^{-\sigma} \\ \frac{1}{3}\,e^{\sigma/3} \end{pmatrix}\Bigg|_{\sigma=t^3} \;=\; \begin{pmatrix} 3\,t^2\,e^{-t^3} \\ t^2\,e^{t^3/3} \end{pmatrix},$$

daher:

$$v(t) \;=\; |\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)| \;=\; \sqrt{9\,t^4\,e^{-2\,t^3} + t^4\,e^{2\,t^3/3}} \;=\; t^2\sqrt{9\,e^{-2\,t^3} + e^{2\,t^3/3}} \quad \Rightarrow \quad v(1) \;=\; \sqrt{\frac{9}{e^2} + e^{2/3}}\,.$$

Beispiel 2.

Gegeben sei der Kegel K,

$$x^2 + z^2 \;=\; \left(\frac{R}{H}\right)^2 y^2, \quad 0 \le y \le H$$

mit Basisradius R und Höhe H, und die Dichtefunktion (Massendichte im $\mathbb{R}^3$)

$$\rho(x, y, z) = 6(x^2 + z^2).$$

Bestimmen Sie das Trägheitsmoment von K bezüglich Rotation um die y-Achse, d.h.

$$\int_K \rho(x, y, z)(x^2 + z^2)dV.$$

Eine Skizze ist nützlich.

LÖSUNG

Substitution von Zylinderkoordinaten unter Berücksichtigung der Drehachse führt zum Ziel:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = y, \quad z = r\sin\varphi \quad \text{(Zylinderkoordinaten bezüglich der } y\text{-Achse!)}$$

Dabei ist der Betrag der Funktionaldeterminante wiederum $\left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,\varphi)}\right)\right| = r$.

Der transformierte Integrand setzt sich zusammen aus

- der transformierten Dichte $\rho(x, y, z) = 6r^2$,
- der transformierten Gewichtsfunktion $y^2 + z^2 = r^2$, sowie
- der Funktionaldeterminante r.

Daher (am einfachsten mit innerstem Integral bezüglich r):

$$\int_K \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dV \;=\; \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R}{H}y} 6r^5 dr\, dy\, d\varphi \;=\; \frac{12\pi R^6}{6H^6}\int_0^H y^6 dy \;=\; \frac{2R^6 H\pi}{7}.$$

Beispiel 3.

Gegeben sei die gewöhnliche DGL

$$\dot{v} \;=\; \Big(\alpha + \frac{v}{\alpha}\Big)^2, \tag{1}$$

wobei $\alpha > 0$ eine beliebige Konstante.

a) Man zeige, dass (1) eine spezielle, konstante Lösung der Gestalt $v(t) \equiv \mathrm{C}$ besitzt und gebe die Konstante C an.

b) Man löse das Anfangswertproblem für die DLG (1) mit der Anfangsbedingung

$$v(0) \;=\; \alpha^2\,,$$

und diskutiere den Verlauf der Lösung $v(t)$ für $t > 0$.

LÖSUNG

a) Für eine konstante Lösung $v(t) \equiv C$ muss gelten $\dot{v}(t) \equiv 0$, also aufgrund von (1): $\dot{v} = \alpha + \frac{v}{\alpha} \equiv 0$. Die gesuchte spezielle Lösung lautet daher

$$v(t) \;\equiv\; -\alpha^2\,.$$

b) Mit der Substitution $w := \alpha + \frac{v}{\alpha}$, $dv = \alpha\, dw$, transformiert sich die DGL (1) zu

$$\dot{w} \;=\; \frac{w^2}{\alpha}\,, \qquad \rightarrow \qquad dw\, w^{-2} \;=\; \frac{dt}{\alpha}\,.$$

Integration ergibt die allgemeine Lösung

$$-w^{-1} \;=\; \frac{t}{\alpha} + C \qquad \Rightarrow \qquad w(t) \;=\; -\,\frac{1}{\frac{t}{\alpha} + C}\,,$$

also

$$v(t) \;=\; \alpha\,(w(t) - \alpha) \;=\; -\,\alpha\Big(\frac{1}{\frac{t}{\alpha} + C} + \alpha\Big)\,.$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = \alpha^2$ ergibt

$$\alpha^2 \;=\; v(0) \;=\; -\,\alpha\Big(\frac{1}{C} + \alpha\Big) \qquad \Rightarrow \qquad C \;=\; -\,\frac{1}{2\,\alpha}\,,$$

also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$v(t) \;=\; \alpha\Big(\frac{1}{\frac{1}{2\,\alpha} - \frac{t}{\alpha}} - \alpha\Big) \;=\; \alpha^2\Big(\frac{1}{\frac{1}{2} - t} - 1\Big) \;=\; \alpha^2\,\frac{1 + 2\,t}{1 - 2\,t}\,.$$

Für $t \in [0, \frac{1}{2})$ ist die Lösung positiv und monoton wachsend; sie wächst gegen $+\infty$ für $t \uparrow \frac{1}{2}$.