Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Haupttest (25. Januar 2008)

Gruppe weiß (*mit Lösung*)

— — *kein Taschenrechner; Skriptum erlaubt* — —

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18):*		

Beispiel 1.

Durch die beiden gewöhnlichen DGLen (mit Anfangswerten)

$$x'(\tau) \;=\; \frac{x(\tau)}{2}\,, \quad x(0)=1, \qquad \text{und} \qquad y'(\tau) \;=\; 1-y(\tau)\,, \quad y(0)=0,$$

sei eine ebene Kurve $\boldsymbol{r}(\tau)=(x(\tau),y(\tau))$ festgelegt.

a) Man zeige

$$\boldsymbol{r}(\tau) \;=\; \begin{pmatrix} e^{\tau/2} \\ 1-e^{-\tau} \end{pmatrix},$$

indem man die Lösungen der gegebenen Anfangswertprobleme explizit berechne.

b) Man berechne

$$\int_C dx$$

entlang des Kurvenabschnittes C von $\tau=0\ldots1$.

c) Ein Massepunkt bewege sich entlang der Kurve, wobei die Dynamik der Bewegung dadurch beschrieben wird, dass der Kurvenparameter τ als Funktion der Zeit t vorgegeben ist:

$$\tau(t) \;=\; t^2 \qquad (\text{Start bei } t=0.)$$

Man berechne den Betrag der Geschwindigkeit des Massepunktes zum Zeitpunkt $t=1$, ohne die Formel $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{r}(\tau(t))$ für die Bahnkurve explizit aufzustellen. (Kettenregel!)

LÖSUNG

a) Lösung der gegebenen Anfangswertprobleme für $x(\tau)$, $y(\tau)$ ergibt genau

$$\boldsymbol{r}(\tau) \;=\; \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{\tau/2} \\ 1-e^{-\tau} \end{pmatrix}$$

(elementare Rechnung).

b) Auswertung des Kurvenintegrals:

$$\int_C dx \;=\; \int_{\tau=0}^{1} 1\cdot x'(\tau)\,d\tau \;=\; \int_{\tau=0}^{1} \tfrac{1}{2}\,e^{\tau/2}\,d\tau \;=\; e^{\tau/2}\Big|_{\tau=0}^{1} \;=\; \sqrt{e}-1\,.$$

c) Verwendung der Kettenregel ergibt für $\tilde{\boldsymbol{r}}(t) \;=\; \boldsymbol{r}(\tau(t))$:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(\tau(t)) \;=\; \frac{d}{d\tau}\boldsymbol{r}(\tau(t))\,\frac{d}{dt}\tau(t) \;=\; 2\,t\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{\tau/2} \\ e^{-\tau} \end{pmatrix}\Bigg|_{\tau=t^2} \;=\; \begin{pmatrix} t\,e^{t^2/2} \\ 2\,t\,e^{-t^2} \end{pmatrix},$$

daher:

$$v(t) \;=\; |\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)| \;=\; \sqrt{t^2\,e^{t^2}+4\,t^2\,e^{-2\,t^2}} \;=\; t\sqrt{e^{t^2}+4\,e^{-2\,t^2}} \quad\Rightarrow\quad v(1) \;=\; \sqrt{e+\frac{4}{e^2}}\,.$$

Beispiel 2.

Gegeben sei der Kegel K,

$$y^2 + z^2 \;=\; \left(\frac{a}{h}\right)^2 x^2, \quad 0 \le x \le h$$

mit Basisradius a und Höhe h, und die Dichtefunktion (Massendichte im $\mathbb{R}^3$)

$$\rho(x, y, z) \;=\; 5\sqrt{y^2 + z^2}.$$

Man bestimme das Trägheitsmoment von K bezüglich Rotation um die x-Achse, d.h.

$$\int_K \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dV.$$

Eine Skizze ist nützlich.

LÖSUNG

Substitution von Zylinderkoordinaten unter Berücksichtigung der Drehachse führt zum Ziel:

$$x = x, \quad y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi \quad \text{(Zylinderkoordinaten bezüglich } x\text{-Achse!)}$$

Dabei ist der Betrag der Funktionaldeterminante wiederum $\left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,\varphi)}\right)\right| = r$.

Der transformierte Integrand setzt sich zusammen aus

- der transformierten Dichte $\rho(x, y, z) = 5r$,
- der transformierten Gewichtsfunktion $y^2 + z^2 = r^2$, sowie
- der Funktionaldeterminante r.

Daher (am einfachsten mit innerstem Integral bezüglich r):

$$\int_K \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dV \;=\; \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{x=0}^{h}\int_{r=0}^{\frac{a}{h}x} 5r^4 dr\, dx\, d\varphi \;=\; \frac{10\pi a^5}{5h^5}\int_0^h x^5 dx \;=\; \frac{a^5 h\pi}{3}.$$

Beispiel 3.

Gegeben sei die gewöhnliche DGL

$$\dot{u} \;=\; \Big(1+\frac{u}{\varepsilon}\Big)^2, \tag{1}$$

wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebige Konstante.

a) Man zeige, dass (1) eine spezielle, konstante Lösung der Gestalt $u(t) \equiv \mathrm{C}$ besitzt und gebe die Konstante C an.

b) Man löse das Anfangswertproblem für die DLG (1) mit der Anfangsbedingung

$$u(0) \;=\; \varepsilon\,,$$

und diskutiere den Verlauf der Lösung $u(t)$ für $t > 0$.

LÖSUNG

a) Für eine konstante Lösung $u(t) \equiv C$ muss gelten $\dot{u}(t) \equiv 0$, also aufgrund von (1): $\dot{u} = 1 + \frac{u}{\varepsilon} \equiv 0$. Die gesuchte spezielle Lösung lautet daher

$$u(t) \;\equiv\; -\varepsilon\,.$$

b) Mit der Substitution $v := 1 + \frac{u}{\varepsilon}$, $du = \varepsilon\, dv$, transformiert sich die DGL (1) zu

$$\dot{v} \;=\; \frac{v^2}{\varepsilon}\,, \qquad \rightarrow \qquad dv\, v^{-2} \;=\; \frac{dt}{\varepsilon}\,.$$

Integration ergibt die allgemeine Lösung

$$-v^{-1} \;=\; \frac{t}{\varepsilon} + C \qquad \Rightarrow \qquad v(t) \;=\; -\,\frac{1}{\frac{t}{\varepsilon}+C}\,,$$

also

$$u(t) \;=\; \varepsilon\,(v(t)-1) \;=\; -\,\varepsilon\Big(\frac{1}{\frac{t}{\varepsilon}+C}+1\Big)\,.$$

Die Anfangsbedingung $u(0) = \varepsilon$ ergibt

$$\varepsilon \;=\; u(0) \;=\; -\,\varepsilon\Big(\frac{1}{C}+1\Big) \qquad \Rightarrow \qquad C \;=\; -\,\frac{1}{2}\,,$$

also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) \;=\; \varepsilon\Big(\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{t}{\varepsilon}}-1\Big) \;=\; \varepsilon\Big(\frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{2}-t}-1\Big)\,.$$

Für $t \in [0, \frac{\varepsilon}{2})$ ist die Lösung positiv und monoton wachsend; sie wächst gegen $+\infty$ für $t \uparrow \frac{\varepsilon}{2}$.