Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Test am 23. Oktober 2007

Gruppe blau (*mit Lösung*)

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Wir betrachten die Folge von bestimmten Integralen

$$I_k := \int_{x=0}^{\pi} x^{2k} \cos x \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Man berechne I_0 und I_1.

b) Für $k \geq 1$ leite man eine Rekursionsformel der Gestalt

$$I_k = a_k \, I_{k-1} + b_k$$

her, d.h. man gebe die betreffenden Koeffizienten a_k und b_k an.

LÖSUNG

a) $I_0 = \int_{x=0}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{x=0}^{\pi} = 0$

Zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x=0}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx = x^2 \sin x \Big|_{x=0}^{\pi} - \int_{x=0}^{\pi} 2x \sin x \, dx \\ &= 0 - 2 \int_{x=0}^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx \\ &= -2 \left(x \left(-\cos x\right) \Big|_{x=0}^{\pi} + \int_{x=0}^{\pi} \cos x \, dx \right) = -2\pi \end{aligned}$$

b) Zweimalige partielle Integration analog wie unter a):

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{x=0}^{\pi} \underbrace{x^{2k}}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx = x^{2k} \sin x \Big|_{x=0}^{\pi} - \int_{x=0}^{\pi} 2k \, x^{2k-1} \sin x \, dx \\ &= 0 - 2k \int_{x=0}^{\pi} \underbrace{x^{2k-1}}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx \\ &= -2k \left(x^{2k-1} \left(-\cos x\right) \Big|_{x=0}^{\pi} + \int_{x=0}^{\pi} (2k-1) \, x^{2k-2} \cos x \, dx \right) \\ &= -2k \, \pi^{2k-1} + 2k \, (1-2k) \, I_{k-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_k = 2k \, (1-2k), \quad b_k = -2k \, \pi^{2k-1}$$

Bewertung: eher leicht, nur mit den Vorzeichen muss man aufpassen.