Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

4. Test am 11. Dezember 2007

Gruppe blau *(mit Lösung)*

— — kein Taschenrechner, keine Unterlagen — —

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**	*Punkte (max. 6)*

Man berechne den Flächeninhalt des von der Kurve C,

$$\boldsymbol{r}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} (\sqrt{2\varphi})^{n-1}\cos\varphi \\ (\sqrt{2\varphi})^{n-1}\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi\in[0,\pi] \qquad (\,2\le n\in\mathbb{N}\,)$$

gemeinsam mit dem Abschnitt $[\,-(\sqrt{2\pi})^{n-1},0\,]$ auf der x-Achse berandeten Bereiches mittels eines Flächenintegrals.

(Eine grobe Skizze des Kurvenverlaufes ist hilfreich für die Anschauung.)

LÖSUNG

Die Kurve hat die Gestalt

$$\boldsymbol{r}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r(\varphi)\,\cos\varphi \\ r(\varphi)\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $r(\varphi) = (\sqrt{2\varphi})^{n-1}$ = Abstand vom Nullpunkt. Die Kurve verläuft oberhalb der x-Achse, mit Anfangs- und Endpunkt genau auf der x-Achse.

Daher in Polarkoordinaten, mit der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$:

$$\text{Fläche} \;=\; \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{(\sqrt{2\varphi})^{n-1}} r\,dr\,d\varphi \;=\; \int_{\varphi=0}^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{(\sqrt{2\varphi})^{n-1}}\right]d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\pi}(2\varphi)^{n-1}\,d\varphi \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{(2\varphi)^n}{n}\Big|_{\varphi=0}^{\pi} \;=\; \frac{(2\pi)^n}{4n}\,.$$

Bewertung: eher leicht.