Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2008/09

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Haupttest am 23. Jänner 2009

(mit Lösung)

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1.
Ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -e^{\sqrt{y}} \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Massepunkt befindet sich zum Zeitpunkt $t \in [0, \pi/2]$ im Raumpunkt

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \pi/2$ bewegt sich der Massepunkt in dem Feld $\boldsymbol{F}$. Bestimmen Sie die Arbeit, die das Feld während dieser Zeit an ihm verrichtet.

Hinweis: zweimalige partielle Integration.

b) Ab dem Zeitpunkt $t = \pi/2$ wirken keine Kräfte mehr auf den Massepunkt, und er bewegt sich auf einer Geraden mit der zum Zeitpunkt $t = \pi/2$ gegebenen Momentangeschwindigkeit weiter. Geben Sie diese Gerade an.

c) Zu welchem Zeitpunkt $t > \pi/2$ durchstößt der Massepunkt die Ebene, die durch die Gleichung $x + \pi z = 1$ beschrieben wird?

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned}
\text{Arbeit } W &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^t, -\cos t, 0) \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^t \sin t - 2t\cos t]\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2(t\sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 5) - \pi
\end{aligned}$$

Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned}
\int e^t \sin t &= -e^t\cos t + \int e^t \cos t = -e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t \\
\Rightarrow \int e^t \sin t &= \frac{1}{2}(-e^t\cos t + e^t \sin t) + C \\
\int 2t\cos t &= 2t\sin t - \int 2\sin t = 2t\sin t + 2\cos t + C
\end{aligned}$$

b)

$$\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi^2}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade } \tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi^2}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + (t - \frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \geq \frac{\pi}{2}$$

c) Ebene $x + \pi z = 1$ geschnitten mit Gerade $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ ergibt $-(t - \frac{\pi}{2}) + \pi = 1$ und daher

$$t = \frac{3\pi}{2} - 1$$

Aufgabe 2.
Gegeben sei das Drehhyperboloid

$$x^2 + y^2 \leq z^2 + 2, \quad 0 \leq z \leq 2$$

mit der inhomogenen Dichte $\rho = x^2 + y^2$. Berechnen Sie den Schwerpunkt.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Auswirkungen Symmetrien des Körpers und seiner Dichteverteilung auf die Schwerpunktskoordinaten haben!

LÖSUNG

Der Schwerpunkt eines Körpers K mit Dichte $\rho(x, y, z)$ ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \frac{1}{V} \int_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho(x, y, z) dV,$$

wobei die Integration komponentenweise durchzuführen ist und V das Volumen von K bezeichnet. Aufgrund der Rotationssymmetrie von K und ρ erkennt man, dass $s_x = 0$ und $s_y = 0$ gelten muss. Es bleibt also lediglich das Volumen V und dann die z-Koordinate von S zu berechnen. Dazu substituieren wir Zylinderkoordinaten (Funktionaldeterminante r). Die Gleichung des Hyperboloids wird zu $r^2 \leq z^2 + 2$ bzw. $r \leq \sqrt{z^2 + 2}$ da $r > 0$. ρ wird zu $\rho(r, \varphi, z) = r^2$. Die Grenzen der Integrale kann man auch der Skizze entnehmen: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in [0, 2]$ und für ein festgehaltenes z muss $r \in [0, \sqrt{z^2 + 2}]$ sein.

$$V = \int_K \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z^2+2}} r\rho(r, \varphi, z) dr dz d\varphi$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z^2+2}} r^3 dr dz d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 (z^2 + 2)^2 dz = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (z^4 + 4z^2 + 4) dz = \\ &= \frac{\pi}{2} (\frac{2^5}{5} + \frac{2^5}{3} + 2^3) = \frac{188}{15} \pi. \end{aligned}$$

Die z-Koordinate des Schwerpunkts führt auf ein ähnliches Integral. Beim Berechnen kann man entweder wieder ausmultiplizieren oder benutzen, dass z bis auf eine Konstante die innere Ableitung des Ausdrucks in der Klammer ist:

$$\begin{aligned} s_z &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z^2+2}} z r^3 dr dz d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2V} \int_0^2 z(z^2 + 2)^2 dz = \frac{\pi}{2V} \frac{(z^2 + 2)^3}{6} |_0^2 \\ &= \frac{\pi}{12V} (6^3 - 2^3) = \frac{52\pi}{3V} = \frac{65}{47}. \end{aligned}$$

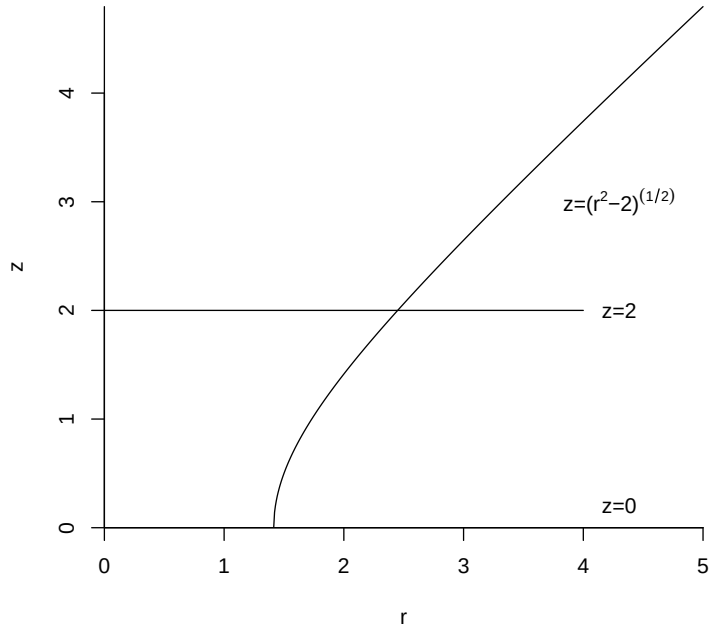

Abbildung 1: Skizze eines Querschnitts des Drehhyperboloids

Damit ist der Schwerpunkt

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{65}{47} \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Sollte man nicht erkennen, dass die x und y-Komponenten des Schwerpunkts 0 sind, sind die auftretenden Integrale einfach zu berechnen. $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ bringen jeweils eine φ-Abhängige Funktion in den Integranden. Nun ist aber $\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$.

Aufgabe 3.
Gegeben ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(x^2 + y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: Die Differentialgleichung (1) ist nicht exakt.

b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $a = a(x)$, sodass die Differentialgleichung (1) zu einer exakten Differentialgleichung wird.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) mithilfe der Lösungsmethode für exakte Differentialgleichungen.

d) Verifizieren Sie die Richtigkeit Ihrer so erhaltenen allgemeinen Lösung durch Einsetzen in (1).

e) Berechnen Sie die spezielle Lösung von (1) zu der Anfangsbedingung $y(2) = 0$.

LÖSUNG

a) Die allgemeine Form der gegebenen Differentialgleichung lautet:

$$p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = 0.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= x^2 + y \\ q(x, y) &= -x. \end{aligned}$$

Um die Differentialgleichung auf Exaktheit zu überprüfen, bildet man die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x, y) &= -1. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \neq \frac{\partial}{\partial x} q(x, y)$$

und daher ist die gegebene Differentialgleichung auch nicht exakt!

b) Die Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ werden nun mit einem integrierenden Faktor $a = a(x)$ multipliziert

$$\tilde{p}(x, y) = a(x)p(x, y), \qquad \tilde{q}(x, y) = a(x)q(x, y)$$

und wieder partiell differentiert, was

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{p}(x, y) &= a(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \tilde{q}(x, y) &= -a'(x)x - a(x) \end{aligned}$$

ergibt. Die Bedingung für Exaktheit

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\tilde{p}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\,\tilde{q}(x,y)$$

ergibt nun

$$a(x) = -a'(x)x - a(x) \quad \text{bzw.} \quad a'(x) = -\frac{2a(x)}{x}.$$

Die unbestimmte Integration dieser Gleichung

$$\int \frac{\mathrm{d}a}{a(x)} = -\int \frac{2\mathrm{d}x}{x}$$

ergibt

$$\ln|a(x)| = -2\ln|x| \quad \text{und führt auf} \quad a(x) = \frac{1}{x^2}.$$

c) Das gesuchte skalare Potential $\Phi(x,y)$ ist nun durch die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = \tilde{p}(x,y) = 1 + \frac{y}{x^2} \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = \tilde{q}(x,y) = -\frac{1}{x} \tag{3}$$

gegeben. Unbestimmte Integration der ersten Gleichung (2) nach x ergibt

$$\Phi(x,y) = \int (1 + \frac{y}{x^2})\mathrm{d}x + C(y) = x - \frac{y}{x} + C(y) \tag{4}$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $C(y)$. Das so erhaltene Skalarfeld $\Phi(x,y)$ wird sofort wieder nach y differenziert, also

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = -\frac{1}{x} + C'(y)$$

und mit (3) gleichgesetzt. Damit erhält man eine Differentialgleichung für $C(y)$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + C'(y) \quad \text{bzw.} \quad C'(y) = 0,$$

die sofort $C(y) = \text{constant}$ ergibt. Man setzt nun am einfachsten $C(y) = 0$ und bekommt

$$\Phi(x,y) = x - \frac{y}{x}. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung $y(x)$ der gegebenen Differentialgleichung (1) erhält man nun, indem man $\Phi(x,y)$ als konstant ansetzt, also

$$\Phi(x,y) = x - \frac{y}{x} = c \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 - cx.$$

d) Zum Verifizieren der so erhaltenen allgemeinen Lösung schreibt man sich die gegebene Differentialgleichung (1) am besten in der Form

$$x^2 + y - xy' = 0$$

an und setzt anschließend

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 - cx \quad \text{und} \\ y'(x) &= 2x - c \end{aligned}$$

ein, also

$$x^2 + x^2 - cx - 2x^2 + cx = 0.$$

e) Die Anfangsbedingung $y(2) = 0$ ergibt

$$0 = 4 - 2c \quad \text{also} \quad c = 2$$

und damit die spezielle Lösung

$$y(x) = x^2 - 2x.$$