Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2008/09

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest am 20. März 2009

(mit Lösung)

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1.
Der Bereich B wird von dem Paraboloid $x^2 + y^2 = \frac{z}{3} + 1$ und der Ebene $z = 3$ begrenzt und besitzt die Dichte $\rho(x, y, z) = x^2$. Berechnen Sie die Masse $\int_B \rho dV$ des Körpers. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Fertigen Sie eine Skizze des Integrationsbereiches an.
2. Geben Sie Ungleichungen für die Grenzen Ihrer Integrationsvariablen an.
3. Berechnen Sie das Integral.

LÖSUNG

1. Skizze des Integrationsbereiches

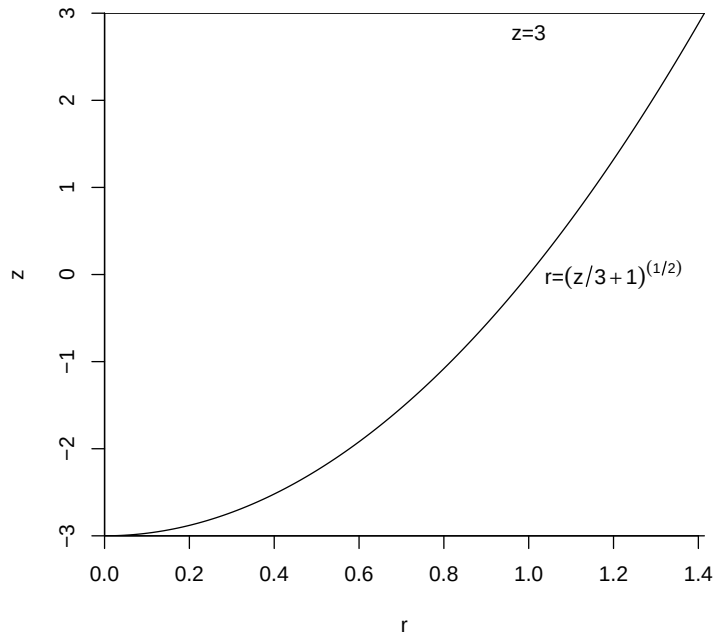

Abbildung 1: Skizze eines Querschnitts des Paraboloids

2. Nach Substitution in Zylinderkoordinaten mit z als Drehachse ergibt sich für die Grenzen φ, r und z gemäß obiger Skizze:

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \ -3 \leq z \leq 3, \ 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{z}{3} + 1}.$$

3. Unter Berücksichtigung der Funktionaldeterminante r und dem transformierten Ausdruck $\rho(r, \varphi, z) = r^2 \cos^2 \varphi$ ergibt sich für das Integral:

$$\int_B \rho dV = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{\frac{z}{3}+1}} r^3 dr dz$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \sin\varphi\cos\varphi|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (1-\cos^2\varphi) d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \pi$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{\frac{z}{3}+1}} r^3 dr dz &= \frac{1}{4}\int_{-3}^{3} (\frac{z}{3}+1)^2 dz \\ \frac{1}{4}\,(\frac{z}{3}+1)^3\Big|_{-3}^{3} &= 2 \end{aligned}$$

Insgesamt errechnet man für die Masse von B:

$$\int_B \rho dV = 2\pi.$$

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$$

und führen Sie eine Probe durch.

b) Bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} = \cos(2t)$$

zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \dot{y}(0) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung einer Partikulärlösung den Ansatz

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$

LÖSUNG

a) Das charakteristische Polynom der DGL ist durch

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

gegeben und besitzt die Lösungen

$$\lambda_1 = -1 + i \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = -1 - i.$$

Die daraus resultierende reelle Darstellung für die Lösungen der homogenen DGL lautet daher

$$y(t) = e^{-t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)).$$

b) Das charakteristische Polynom der DGL ist durch

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

gegeben und besitzt die Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = -4.$$

Die daraus resultierende reelle Darstellung für die Lösungen der homogenen DGL lautet daher

$$y_h(t) = C_1 + C_2 e^{-4t}.$$

Zweimaliges Differenzieren der Ansatzfunktion liefert

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A\cos(2t) + B\sin(2t) \\ \dot{y}_p(t) &= -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ \ddot{y}_p(t) &= -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t), \end{aligned}$$

und durch Einsetzen in die DGL erhält man die Gleichung

$$(-4A + 8B)\cos(2t) - (8A + 4B)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\cos(2t)$ und $\sin(2t)$ führt diese Gleichung zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4A + 8B &= 1 \\ -8A - 4B &= 0, \end{aligned}$$

welches die Lösungen

$$A = -\frac{1}{20} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{10}$$

besitzt. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= C_1 + C_2 e^{-4t} - \frac{1}{20}\cos(2t) + \frac{1}{10}\sin(2t). \end{aligned}$$

Zur Anpassung der allgemeinen Lösung an die gegebenen Anfangsbedingungen bildet man die erste Ableitung und wertet diese bei $t = 0$ aus. Das ergibt

$$\dot{y}(0) = -4C_2 + \frac{1}{5} \overset{!}{=} 0, \qquad \text{also} \qquad C_2 = \frac{1}{20}.$$

Auswerten der allgemeinen Lösung an der Stelle $t = 0$ ergibt

$$y(0) = C_1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} \overset{!}{=} 1$$

und man erhält

$$C_1 = 1.$$

Die gesuchte Lösung lautet daher

$$y(t) = 1 + \frac{1}{20}e^{-4t} - \frac{1}{20}\cos(2t) + \frac{1}{10}\sin(2t).$$

Aufgabe 3.

Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ x^2+z^2 \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

1. Finden Sie eine Parameterdarstellung $\vec{r}_1(t)$ für die Strecke C_1 von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$. Berechnen Sie anschließend das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z)$ entlang der Kurve C_1.
2. Sei C_2 eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\vec{r}_2(t) = (t, t^2, 1)$ von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$. Welche Kurve wird durch die angegebene Parameterdarstellung beschrieben? Fertigen Sie ein Skizze an.
   Berechnen Sie auch das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z)$ entlang der Kurve C_2.
3. Berechnen Sie weiters das Kurvenintegrals des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z)$ entlang der geschlossenen Kurve C. Diese Kurve C sei gegeben durch C_1 von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$ und durch C_3 mit der Parameterdarstellung $\vec{r}_2(t) = (t, t^2, 1)$ von $(2,4,1)$ nach $(0,0,1)$?
4. Ist $\vec{F}(x,y,z)$ ein Gradientenfeld? Begründen Sie!

LÖSUNG

1.
$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2$$

$$\int_{C_1} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \\ t^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_0^2 5t^2 \cdot dt = \frac{5}{3}t^3 \Big|_0^2 = \frac{40}{3}$$

2.
$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2$$

$$\int_{C_2} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} \cdot dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_0^2 \left(t^2 + 2t^4\right) \cdot dt =$$
$$= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{232}{15}$$

Die gegebene Parameterdarstellung beschreibt ein Parabelstück in der Ebene $z = 1$.

3. $\int_C \vec{F}(\vec{r}\, d\vec{s}) = \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} + \int_{-C_2} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} = \frac{40}{3} - \frac{232}{15} = -\frac{32}{15}$
4. Es handelt sich um kein Gradientenfeld, da das Ergebnis der Kurvenintegrale für gleiche Anfangs- und Endpunkte offensichtlich vom gewählten Weg abhängt.