Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada WS 2008/09

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

5. Test am 14. Januar 2009

Gruppe weiss - *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* -

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

a. Gegeben sei die homogene Differentialgleichung:

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 0.$$

Bestimmen Sie eine Lösungsbasis und stellen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ als Linearkombination dieser Basisfunktionen dar.

b. Lösen Sie das inhomogene Problem

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = e^t$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = -\frac{1}{4}$ und $\dot{y}(0) = -\frac{1}{12}$.

LÖSUNG

a. Die Gleichung hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ mit den Nullstellen 4 und -1. Daher sind die Basisfunktionen $y_1(t) = e^{4t}$ und $y_2(t) = e^{-t}$. Jede Lösung der homogenen Gleichung kann als Linearkombination dieser Basisfunktionen dargestellt werden:

$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}.$$

b. Das homogene Problem ist bereits gelöst. Die allgemeine Lösung lässt sich als Summe eines homogenen Anteils y_h und eines partikulären Anteils y_p schreiben. Eine Partikulärlösung kann man mittels des Ansatzes $y_p(t) = ae^{bt}$ berechnen. Einsetzen liefert:

$$ab^2 e^{bt} - 3abe^{bt} - 4ae^{bt} = e^t.$$

Also muss $b = 1$ und $ab^2 - 3ab - 4a = 1$ gelten damit der Ansatz die Gleichung löst. Man erhält $a = -\frac{1}{6}$ also $y_p(t) = -\frac{1}{6}e^t$ als Partikulärlösung. Eine andere Möglichkeit eine Partikulärlösung zu finden ist mittels Variation der Konstanten $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$. Durch Einführen der Bedingung $\dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0$ und Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man das System

$$\begin{aligned} y_1\dot{c}_1 + y_2\dot{c}_2 &= 0 \\ \dot{y}_1\dot{c}_1 + \dot{y}_2\dot{c}_2 &= e^t \end{aligned}$$

Auflösen nach $\dot{c_1}$ und $\dot{c_2}$ sowie integrieren (als Integrationskonstante 0 wählen) ergibt hier genau die Partikulärlösung die man auch mit dem Ansatz erhalten hätte.
Die Lösung hat also die Gestalt:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{6} e^t.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 können durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{1}{4} = c_1 + c_2 - \frac{1}{6} \\ \dot{y}(0) &= -\frac{1}{12} = 4c_1 - c_2 - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man $c_1 = 0$ und $c_2 = -\frac{1}{12}$. Die Lösung lautet daher:

$$y(t) = -\frac{1}{12} e^{-t} - \frac{1}{6} e^t.$$