Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2010/2011

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (21. Jänner 2011)

Gruppe bunt *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1. (10 Punkte) Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung

$$\alpha^2 y' = \frac{1 - 2y - 3x^2y^2}{x^3y + x + y} \tag{1}$$

1. Geben Sie alle Werte für α an, sodass (1) zu einer exakten Differentialgleichung wird.
2. Setzen Sie nun $\alpha = \sqrt{2}$ in (1) und berechnen Sie ein zugehöriges Skalarfeld $\Phi = \Phi(x, y)$.
3. Bestimmen Sie aus der Gleichung

   $$\Phi(x, y) = c, \qquad (c = const.)$$

   die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung (1).
4. Berechnen Sie nun die Konstante c, sodass die im Punkt 3 erhaltene Lösung durch den Punkt $(0, -1)$ verläuft.

LÖSUNG

1. Wir bestimmen α aus den Integrabilitätsbedingungen.

   $$\begin{aligned} p &= 3x^2y^2 + 2y - 1 \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}p = 6x^2y + 2 \\ q &= \alpha^2(x^3y + x + y) \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}q = \alpha^2(3x^2y + 1) \end{aligned}$$

   Aus der Forderung

   $$\frac{\partial}{\partial y}p = \frac{\partial}{\partial x}q$$

   ergibt sich $\alpha^2 = 2$ und damit $\alpha = \pm\sqrt{2}$.
2. Wir berechnen $\Phi(x, y)$ indem wir zwei Integrationen wie folgt durchführen.

   $$\Phi(x, y) = \int p \, \mathrm{d}x = \int (3x^2y^2 + 2y - 1) \, \mathrm{d}x = x^3y^2 + 2xy - x + D(y),$$

   bzw.

   $$\Phi(x, y) = \int q \, \mathrm{d}y = \int 2(x^3y + x + y) \, \mathrm{d}y = x^3y^2 + 2xy + y^2 + C(x).$$

   Durch Gleichsetzen ergibt sich daraus

   $$-x + D(y) = y^2 + C(x)$$

   und weiter $C(x) = -x$ und $D(y) = y^2$. Einsetzen in einem der Ausdrücke für $\Phi(x, y)$ führt zu

   $$\Phi(x, y) = y^2(1 + x^3) + 2xy - x.$$

3. Zum Auflösen der Gleichung $\Phi(x, y) = c$ verwenden wir die Lösungsformel für quadratische Gleichungen angewandt auf die Variable y. Das ergibt

$$y_{1,2}(x) = -\frac{x}{1+x^3} \pm \sqrt{\frac{x^2}{(1+x^3)^2} + \frac{x+c}{1+x^3}}. \tag{2}$$

4. Die Bedingung $y(0) = -1$ kann nur durch die Verwendung des negativen Vorzeichens der Wurzel in (2) erzielt werden. Wir erhalten damit die Gleichung

$$-\sqrt{\frac{c}{1}} = -1$$

und somit $c = 1$. Die spezielle Lösung von (1) lautet daher

$$y(x) = -\frac{x}{1+x^3} - \sqrt{\frac{x^2}{(1+x^3)^2} + \frac{x+1}{1+x^3}}.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{1-x} - \frac{1}{x^2-1} \qquad x > 1$$

Geben Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ an.

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = 0$$

Geben Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ an und weisen Sie nach, dass ein Fundamentalsystem vorliegt. Bestimmen Sie zusätzlich die Werte der vorhandenen Konstanten, sodass die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 4$ erfüllt sind.

LÖSUNG

a) Die Lösung ergibt sich laut Satz 5.2. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y' = \frac{1}{1-x}y = \lambda(x)y$$

Die Ausdrücke

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(\tau)\, d\tau = -\ln(1-x)$$

$$\Lambda(x) - \Lambda(s) = \ln\left(\frac{1-s}{1-x}\right)$$

$$\int_0^x e^{\Lambda(x)-\Lambda(s)} g(s)\, ds = \int_0^x \frac{1-s}{1-x} \underbrace{\frac{1}{1-s^2}}_{(1+s)(1-s)} ds' = \frac{1}{1-x}\int_0^x \frac{1}{1+s}\, ds = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

ergeben nach Einsetzen in die Formel für $y(x)$

$$y(x) = Ce^{\Lambda(x)} + \int_0^x e^{\Lambda(x)-\Lambda(s)} g(s)\, ds = \frac{C}{1-x} + \frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

b) Charakteristisches Polynom der Gleichung:

$$\lambda^2 + 5\lambda + \frac{25}{4} = 0$$

Lösung der Gleichung mit kleiner Lösungsformel:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$$

Da es sich bei $\lambda = -\frac{5}{2}$ um eine doppelte Nullstelle handelt, gilt der Lösungsansatz für die DGL laut (5.24)

$$C_1 \underbrace{e^{\lambda x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{x e^{\lambda x}}_{y_2(x)} = e^{-\frac{5}{2}x}(C_1 + C_2 x)$$

Nachweis Fundamentalsystem: Wronski-Determinante $\neq 0$ für irgendein x.

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{5}{2}x} & x e^{-\frac{5}{2}x} \\ -\frac{5}{2} e^{-\frac{5}{2}x} & e^{-\frac{5}{2}x} - \frac{5}{2} x e^{-\frac{5}{2}x} \end{pmatrix} = e^{-5x}\left(1 - \frac{5}{2}x\right) + \frac{5}{2} e^{-5x} x = \underbrace{e^{-5x}}_{>0}$$

$\rightarrow$ Fundamentalsystem liegt vor.

Erfüllung der Anfangsbedingungen: mit

$$y'(x) = e^{-\frac{5}{2}x}\left(-\frac{5}{2}C_1 - \frac{5}{2}C_2 x + C_2\right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \quad &\rightarrow \quad C_1 = 1 \\ y'(0) = 4 \quad &\rightarrow \quad -\frac{5}{2} + C_2 = 4 \rightarrow C_2 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Der Körper K bestehe aus allen Punkten (x, y, z), die

$$-1 < z < 2 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < (2-z)^2 \tag{3}$$

erfüllen und habe die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{(2-z)^2}.$$

Ziel ist die Berechnung des Massenmittelpunkts von K. Gehen Sie dazu schrittweise vor:

a) Zur Berechnung der Integrale ist eine Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (r, \phi, z)$ der Form

$$x = ar\cos\phi \tag{4}$$
$$y = br\sin\phi \tag{5}$$
$$z = z \tag{6}$$

nützlich. Überlegen Sie, wie a und b zu wählen sind, damit die Ungleichungen (3) nach der Transformation eine besonders einfache Gestalt annehmen. Geben Sie die Ungleichungen für die Grenzen von K in den neuen Variablen (r, ϕ, z) an[1].

b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation $(x, y, z) \mapsto (r, \phi, z)$.

c) Der Massenmittelpunkt S von K ist definiert durch die Formel

$$S = \frac{1}{\int_K \rho(x, y, z)\, dV} \begin{pmatrix} \int_K x\, \rho(x, y, z) dV \\ \int_K y\, \rho(x, y, z) dV \\ \int_K z\, \rho(x, y, z) dV \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie S unter Verwendung der obigen Transformation.
Stellen Sie unbedingt Symmetrieüberlegungen an, um die Rechungen zu vereinfachen!

LÖSUNG

a) Setzen wir die Tranformationsformeln in die zweite Ungleichung in (3) ein, so erhalten wir

$$\frac{a^2}{4} r^2 \cos^2\phi + \frac{b^2}{9} r^2 \sin^2\phi < (2-z)^2.$$

Also ist die Wahl $a = 2, b = 3$ sinnvoll. Damit ergibt sich für r die Bedingung

$$r^2 < (2-z)^2,$$

wegen $r > 0$ und $2 - z > 0$ also $0 < r < 2 - z$.

Für z gilt weiterhin $-1 < z < 2$ und ϕ unterliegt keiner Einschränkung, durchläuft also den maximalen Bereich $[0, 2\pi]$.

[1] Wie bei herkömmlichen Zylinderkoordinaten verlangen wir, dass r positiv ist und ϕ im Intervall $[0, 2\pi)$ bleibt. Zu bestimmen sind die zusätzlichen Einschränkungen, die sich durch den Integrationsbereich K ergeben.

b) Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobimatrix J:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,z)} = \begin{pmatrix} 2\cos\phi & -2r\sin\phi & 0 \\ 3\sin\phi & 3r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$\det J = 6r.$$

c) Wir berechnen zuerst das Integral im Nenner:

$$\begin{aligned} \int_K \rho(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2}\int_0^{2-z} \rho(r,\phi,z)\,|\det J|\, dr dz d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2}\int_0^{2-z} \frac{1}{(2-z)^2} 6r\, dr dz d\phi = \\ &= 12\pi \int_{-1}^{2} \frac{1}{(2-z)^2}\Big[\int_0^{2-z} r dr\Big] dz \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals in eckiger Klammer ist gerade $\frac{1}{2}(2-z)^2$, sodass sich insgesamt

$$\int_K \rho\, dV = 12\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 18\pi$$

ergibt.

Um die Integrale im Zähler zu berechnen, bemerken wir, dass die Massendichte und der Integrationsbereich symmetrisch in x und y sind. Damit muss der Schwerpunkt auf der z-Achse liegen, d.h. die ersten beiden Komponenten von S sind 0.

Mathematisch sieht man das einfach durch Einsetzen, z.B. ist

$$\int_K x\rho(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2}\int_0^{2-z} 2r\cos\phi \frac{1}{(2-z)^2} 6r\, dr dz d\phi = 0,$$

da $\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 0$.

Zur Berechnung der z-Komponente des Zähler-Integrals transformieren wir analog zu vorher und erhalten

$$\begin{aligned} \int_K z\rho(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2}\int_0^{2-z} z\frac{1}{(2-z)^2} 6r\, dr dz d\phi = \\ &= 12\pi \int_{-1}^{2} \frac{z}{(2-z)^2}\Big[\int_0^{2-z} r dr\Big] dz = \\ &= 6\pi \int_{-1}^{2} z dz = \frac{3}{2} 6\pi. \end{aligned}$$

Damit ist

$$S = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}6\pi \end{pmatrix}}{18\pi} = \frac{1}{2}.$$