Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2009/10

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (27. November 2009)

Gruppe bunt *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1.

Ein Massepunkt bewege sich entlang der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ sowie die Position des Punktes zum Zeitpunkt $t = 3$ seien bekannt:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Bestimmen Sie weiters den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t sowie den Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 3$.

b) Zum Zeitpunkt $t = 3$ verlässt der Punkt seine Bahn und setzt seinen Weg entlang der Tangente an die Kurve fort. Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Tangente an. An welchem Punkt $S(x, y, z)$ durchstößt die Tangente die Ebene $8x + y - \sqrt{2}z = 14$?

LÖSUNG

a) Die Bahnkurve zum Zeitpunkt t ergibt sich durch Integrieren des Geschwindigkeitsvektors unter Ausnutzen der Anfangsbedingung an $t = 3$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\frac{\pi}{12}\int\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)dt \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{12}\int\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)dt \\ \frac{\pi}{6}\int\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)dt \end{pmatrix} = (\text{Substitution } w = \frac{\pi}{6}t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(3) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}3\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}3\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}3\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und somit also } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \sqrt{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{pmatrix}.$$

Differenzieren von $\mathbf{v}(t)$ liefert den Beschleunigungsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = (\text{Kettenregel}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\pi^2}{72}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{72}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ -\frac{\pi^2}{36}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{v}(3)| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}\frac{\pi}{12} \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{12} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\frac{\pi^2}{12^2} + 2\frac{\pi^2}{12^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Tangente $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(3) + t \cdot \mathbf{v}(3)$. Da Zeitpunkt egal ist, kann man als Richtungsvektor auch den Vektor $(1, -1, 0)^T$ benutzen (muss aber nicht!).

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Komponenten in die Ebene $8x + y - \sqrt{2}z = 14$ liefert:

$$8t + \sqrt{2} - t - \sqrt{2} = 14 \Rightarrow t = 2.$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Die Kurve C eines Massepunkts sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}(\sin t)^{3/2} \\ 3\sin t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

a) Bestimmen Sie die Parametrisierung von C nach der Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge von C.

c) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve C nun mit der Parametrisierung

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}t^{3/2} \\ 3t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1.$$

d) Am Ende der Kurve verlässt der Punkt die vorgegebene Bahn und setzt seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit ($\dot{\mathbf{r}}(\pi/2)$ bzw. $\dot{\mathbf{u}}(1)$) entlang einer Geraden fort. Wo befindet er sich 1 Zeiteinheit nachdem er $\mathbf{r}$ verlassen hat? Wo würde er sich 1 Zeiteinheit nach Verlassen von $\mathbf{u}$ befinden?

LÖSUNG

a) Für die Bogenlänge bis $t = \tau$ ist das Integral $\int_C d\mathbf{r} = \int_0^\tau |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$ zu berechnen. Dabei ist

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin^{1/2}\cos t \\ 3\cos t \end{pmatrix}$$

und

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = (16\sin t\cos^2 t + 9\cos^2 t)^{1/2} = \cos t\sqrt{9 + 16\sin t}$$

Die Betragsstriche können weggelassen werden, da $\cos t \ge 0$ für $0 \le t \le \pi/2$. Die Bogenlänge $s(\tau)$ bis $t = \tau$ lautet dann:

$$s(\tau) = \int_0^\tau \cos t\sqrt{9 + 16\sin t}dt = \begin{vmatrix} 9 + 16\sin t = v \\ 16\cos t dt = dv \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{16}\int_9^{9+16\sin\tau} v^{1/2}dv = \frac{1}{24}\left((9 + 16\sin\tau)^{3/2} - 27\right).$$

Umformen nach $\tau = \tau(s)$ ergibt

$$\tau(s) = \arcsin\left(\frac{1}{16}\left((24s + 27)^{2/3} - 9\right)\right)$$

und damit die Parametrisierung $\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(\tau(s))$ nach der Bogenlänge:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{24}\left((24s + 27)^{2/3} - 9\right)^{3/2} \\ \frac{3}{16}\left((24s + 27)^{2/3} - 9\right) \end{pmatrix}.$$

b) $s(\pi/2) = \frac{1}{24}(125 - 27) = \frac{49}{12}$

c) Diese Bogenlänge ist ebenfalls $\frac{49}{12}$, da die Bogenlänge von der Parameterdarstellung unabhängig ist.

d) Die Geschwindigkeit des Massepunkts ist jedoch sehr wohl abhängig von der Parametrisierung:

$$\mathbf{r}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{r}}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}(1) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{u}}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Demnach befindet sich der Punkt 1 Zeiteinheit nach Verlassen von $\mathbf{r}$ noch immer im Punkt $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$, im Gegensatz zu $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$ wo er nach Verlassen von $\mathbf{u}$ zu finden wäre.

Aufgabe 3.

a) Ein Kraftfeld $\mathbf{F}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{\frac{y}{2}} \\ x^2 y e^{\frac{y^2}{4}} \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Ein Massepunkt befindet sich zum Zeitpunkt $t \in [0,1]$ im Raumpunkt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\sqrt{t} \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Zwischen $t = 0$ und $t = 1$ bewegt sich der Massepunkt im Feld $\mathbf{F}$. Bestimmen Sie die Arbeit, die das Feld während dieser Zeit an ihm verrichtet.

b) Das Potential $E(x,y,z) = xy^2 \arcsin z$ erzeugt ein Kraftfeld $\mathbf{G}$ durch $\mathbf{G} = \nabla E$. Berechnen Sie die Arbeit, die $\mathbf{G}$ am Massepunkt verrichtet, ohne $\mathbf{G}$ explizit zu berechnen! (Der Massepunkt bewegt sich auch hier entlang $\mathbf{r}(t),\ 0 \le t \le 1$.)

c) Zeigen Sie, dass durch folgende Parametrisierung

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ \cos(\pi t) \\ e^{-t^2} \end{pmatrix} \qquad -1 \le t \le 1.$$

eine geschlossene Kurve C beschrieben wird. Geben Sie den Wert des Kurvenintegrals des Kraftfelds $\mathbf{G}$ entlang dieser Kurve C an.

LÖSUNG

a) Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt$. Die auftretenden Größen sind:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{t}} \\ 2t^2\sqrt{t}e^t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} \text{ sowie } \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \\ \cos t \end{pmatrix}$$

und damit

$$\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\, dt + 2\int_0^1 t^2 e^t\, dt + \int_0^1 \cos t \sin^2 t\, dt$$

Nun berechnet man die auftretenden Integrale:

(a) Durch Substitution und partielle Integration:

$$\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\, dt = \left| \begin{matrix} \sqrt{t} = u \\ \frac{1}{2u} dt = du \end{matrix} \right| = 2\int_0^1 u e^u du = 2\left(u e^u \Big|_0^1 - \int_0^1 e^u\, du \right) = 2.$$

(b) Durch Partielle Integration und Verwenden des Ergebnis von 1.):

$$2\int_0^1 t^2 e^t\,dt = 2\left(t^2 e^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 te^t\,dt\right) = 2(e-2).$$

(c) Durch Erkennen, dass $\cos t$ die Innere Ableitung ist (oder Substitution):

$$\int_0^1 \cos t \sin^2 t\,dt = \frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\sin^3 1.$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = 2e - 2 + \frac{1}{3}\sin^3 1.$$

b)

$$\int_0^1 \mathbf{G}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = E(\mathbf{r}(1)) - E(\mathbf{r}(0)) = 4 - 0 = 4.$$

c) Das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist wegunabhängig. Man muss das Potential lediglich an Anfangs- und Endpunkt auswerten und die Differenz bilden. Geschlossene Kurven liefern daher immer den Wert 0. $\mathbf{u}(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ e^{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{u}(1)$, also ist $\mathbf{u}$ eine geschlossene Kurve.