Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2009/10

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (27. November 2009)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1. Ein Massepunkt bewege sich entlang der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ sowie die Position des Punktes zum Zeitpunkt $t = 2$ seien bekannt:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Bestimmen Sie weiters den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t sowie den Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 2$.

b) Zum Zeitpunkt $t = 2$ verlässt der Punkt seine Bahn und setzt seinen Weg entlang der Tangente an die Kurve fort. Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Tangente an. An welchem Punkt $S(x, y, z)$ durchstößt die Tangente die Ebene $3x + y - 2z = 7 - 2\sqrt{2}$?

LÖSUNG

a) Die Bahnkurve zum Zeitpunkt t ergibt sich durch Integrieren des Geschwindigkeitsvektors unter Ausnutzen der Anfangsbedingung an $t = 2$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \\ \frac{\pi}{2}\int \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \end{pmatrix} = (\text{Substitution } w = \frac{\pi}{4}t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}2\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ und somit also } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Differenzieren von $\mathbf{v}(t)$ liefert den Beschleunigungsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = (\text{Kettenregel}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\sqrt{2}\frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{v}(2)| = \left| \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi}{4} \\ 0 \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2\frac{\pi^2}{16} + 2\frac{\pi^2}{16}} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Tangente $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(2) + t \cdot \mathbf{v}(2)$. Da Zeitpunkt egal ist, kann man als Richtungsvektor auch den Vektor $(1, 0, 1)^T$ benutzen (muss aber nicht!).

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Komponenten in die Ebene $3x + y - 2z = 7 - 2\sqrt{2}$ liefert:

$$3t + 2 - 2\sqrt{2} - 2t = 7 - 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 5.$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ \sqrt{2} + 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Die Kurve C eines Massepunkts sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin t \\ 2(\sin t)^{3/2} \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

a) Bestimmen Sie die Parametrisierung von C nach der Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge von C.

c) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve mit der Parametrisierung

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t^{3/2} \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1.$$

d) Am Ende der Kurve verlässt der Punkt die vorgegebene Bahn und setzt seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit ($\dot{\mathbf{r}}(\pi/2)$ bzw. $\dot{\mathbf{u}}(1)$) entlang einer Geraden fort. Wo befindet er sich 1 Zeiteinheit nachdem er $\mathbf{r}$ verlassen hat? Wo würde er sich 1 Zeiteinheit nach Verlassen von $\mathbf{u}$ befinden?

LÖSUNG

a) Für die Bogenlänge bis $t = \tau$ ist das Integral $\int_C d\mathbf{r} = \int_0^\tau |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$ zu berechnen. Dabei ist

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 3\sin^{1/2} t \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = (16\cos^2 t + 9\sin t\cos^2 t)^{1/2} = \cos t\sqrt{16 + 9\sin t}$$

Die Betragsstriche können weggelassen werden, da $\cos t \ge 0$ für $0 \le t \le \pi/2$. Die Bogenlänge $s(\tau)$ bis $t = \tau$ lautet dann:

$$s(\tau) = \int_0^\tau \cos t\sqrt{16 + 9\sin t}dt = \begin{vmatrix} 16 + 9\sin t = v \\ 9\cos t dt = dv \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\int_{16}^{16+9\sin\tau} v^{1/2}dv = \frac{2}{27}\left((16 + 9\sin\tau)^{3/2} - 64\right).$$

Umformen nach $\tau = \tau(s)$ ergibt

$$\tau(s) = \arcsin\left(\frac{1}{9}\left(\left(\frac{27}{2}s + 64\right)^{2/3} - 16\right)\right)$$

und damit die Parametrisierung $\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(\tau(s))$ nach der Bogenlänge:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left(\left(\frac{27}{2}s + 64\right)^{2/3} - 16\right) \\ \frac{2}{27}\left(\left(\frac{27}{2}s + 64\right)^{2/3} - 16\right)^{3/2} \end{pmatrix}.$$

b) $s(\pi/2) = \frac{2}{27}(125 - 64) = \frac{122}{27}$

c) Diese Bogenlänge ist ebenfalls $\frac{122}{27}$, da die Bogenlänge von der Parameterdarstellung unabhängig ist.

d) Die Geschwindigkeit des Massepunkts ist jedoch sehr wohl abhängig von der Parametrisierung:

$$\mathbf{r}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{r}}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{u}}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Demnach befindet sich der Punkt 1 Zeiteinheit nach Verlassen von $\mathbf{r}$ noch immer im Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, im Gegensatz zu $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ wo er nach Verlassen von $\mathbf{u}$ zu finden wäre.

Aufgabe 3.

a) Ein Kraftfeld $\mathbf{F}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{x}} \\ xe^{\sqrt{2y}} \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Ein Massepunkt befindet sich zum Zeitpunkt $t \in [0,1]$ im Raumpunkt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zwischen $t = 0$ und $t = 1$ bewegt sich der Massepunkt im Feld $\mathbf{F}$. Bestimmen Sie die Arbeit, die das Feld während dieser Zeit an ihm verrichtet.

b) Das Potential $E(x,y,z) = xy \arccos z$ erzeugt ein Kraftfeld $\mathbf{G}$ durch $\mathbf{G} = \nabla E$. Berechnen Sie die Arbeit, die $\mathbf{G}$ am Massepunkt verrichtet, ohne $\mathbf{G}$ explizit zu berechnen! (Der Massepunkt bewegt sich auch hier entlang $\mathbf{r}(t),\ 0 \le t \le 1$.)

c) Zeigen Sie, dass durch folgende Parametrisierung

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} \\ \cos(\pi t) \\ 1 - t^2 \end{pmatrix} \qquad -1 \le t \le 1.$$

eine geschlossene Kurve C beschrieben wird. Geben Sie den Wert des Kurvenintegrals des Kraftfelds $\mathbf{G}$ entlang dieser Kurve C an.

LÖSUNG

a) Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt$. Die auftretenden Größen sind:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{t}} \\ te^t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \text{ sowie } \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

und damit

$$\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\, dt + \int_0^1 t^2 e^t\, dt + \int_0^1 \cos^2 t(-\sin t)\, dt$$

Nun berechnet man die auftretenden Integrale:

(a) Durch Substitution und partielle Integration:

$$\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\, dt = \left| \begin{matrix} \sqrt{t} = u \\ \frac{1}{2u} dt = du \end{matrix} \right| = 2\int_0^1 ue^u du = 2\left(ue^u \Big|_0^1 - \int_0^1 e^u\, du \right) = 2.$$

(b) Durch Partielle Integration und Verwenden des Ergebnis von 1.):

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt = t^2 e^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 t e^t \, dt = e - 2.$$

(c) Durch Erkennen, dass $(-\sin t)$ die Innere Ableitung ist (oder Substitution):

$$\int_0^1 \cos^2 t (-\sin t) \, dt = \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cos^3 1 - \frac{1}{3}.$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt = e + \frac{1}{3} \cos^3 1 - \frac{1}{3}.$$

b) Das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist wegunabhängig:

$$\int_0^1 \mathbf{G}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt = E(\mathbf{r}(1)) - E(\mathbf{r}(0)) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

c) Das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist wegunabhängig. Man muss das Potential lediglich an Anfangs- und Endpunkt auswerten und die Differenz bilden. Geschlossene Kurven liefern daher immer den Wert 0. $\mathbf{u}(-1) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}(1)$, also ist $\mathbf{u}$ eine geschlossene Kurve.