Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2009/10

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (22. Jänner 2010)

Gruppe 1 *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1. Ein Körper K wird durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq 2 \qquad & \text{und} \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq \frac{z^2}{4} & \end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben. Seine Dichte ist durch das Skalarfeld $\rho = \rho(x) = x^2$ gegeben.
Berechnen Sie die Masse des Körpers K. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

1. Fertigen Sie eine Skizze des Integrationsbereiches an.
2. Für die Berechnung des Volumenintegrals verwenden Sie modifizierte Zylinderkoordinaten in der Form

$$\begin{aligned} x &= ar\cos(\varphi) \\ y &= br\sin(\varphi) \\ z &= z. \end{aligned}$$

   Wählen Sie anhand obiger Ungleichungen (1), die Konstanten a und b geeignet und berechnen Sie anschließend die Funktionaldeterminante der neuen Koordinaten.
3. Geben Sie nun die Ungleichungen für die Grenzen Ihrer neuen Integrationsvariablen (r, φ, z) an.
4. Berechnen Sie das Integral $\int_K \rho dV$ um die Masse zu erhalten.

LÖSUNG

1. Es handelt sich um einen Kegel mit elliptischem Querschnitt (siehe Abb. 1).
2. Die Substitution lautet:

$$x = 5r\cos\varphi, \;\; y = 4r\sin\varphi, \;\; z = z.$$

   Die zugehörige Funktionaldeterminante:

$$\left| \begin{pmatrix} 5\cos\varphi & -5r\sin\varphi & 0 \\ 4\sin\varphi & 4r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 20r\cos^2\varphi + 20r\sin^2\varphi = 20r.$$

3. Die Ungleichung für den Kegel mit elliptischem Querschnitt vereinfacht sich nach der Transformation zu $r^2 \leq \frac{z^2}{4}$. Daher sind die Grenzen entsprechend:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq r \leq \frac{z}{2}.$$

4. $$\int_K y^2 dV = 16 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\frac{z}{2}} 20r^3 \sin^2\varphi dr dz d\varphi = 80\pi \int_0^2 \left(\frac{z}{2}\right)^4 dz = 32\pi.$$

   Dabei wurde verwendet, dass $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \pi$, was man durch partielle Integration und Ausnutzen des Zusammenhangs $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ erhält (vgl. Aufgabe 1.8).

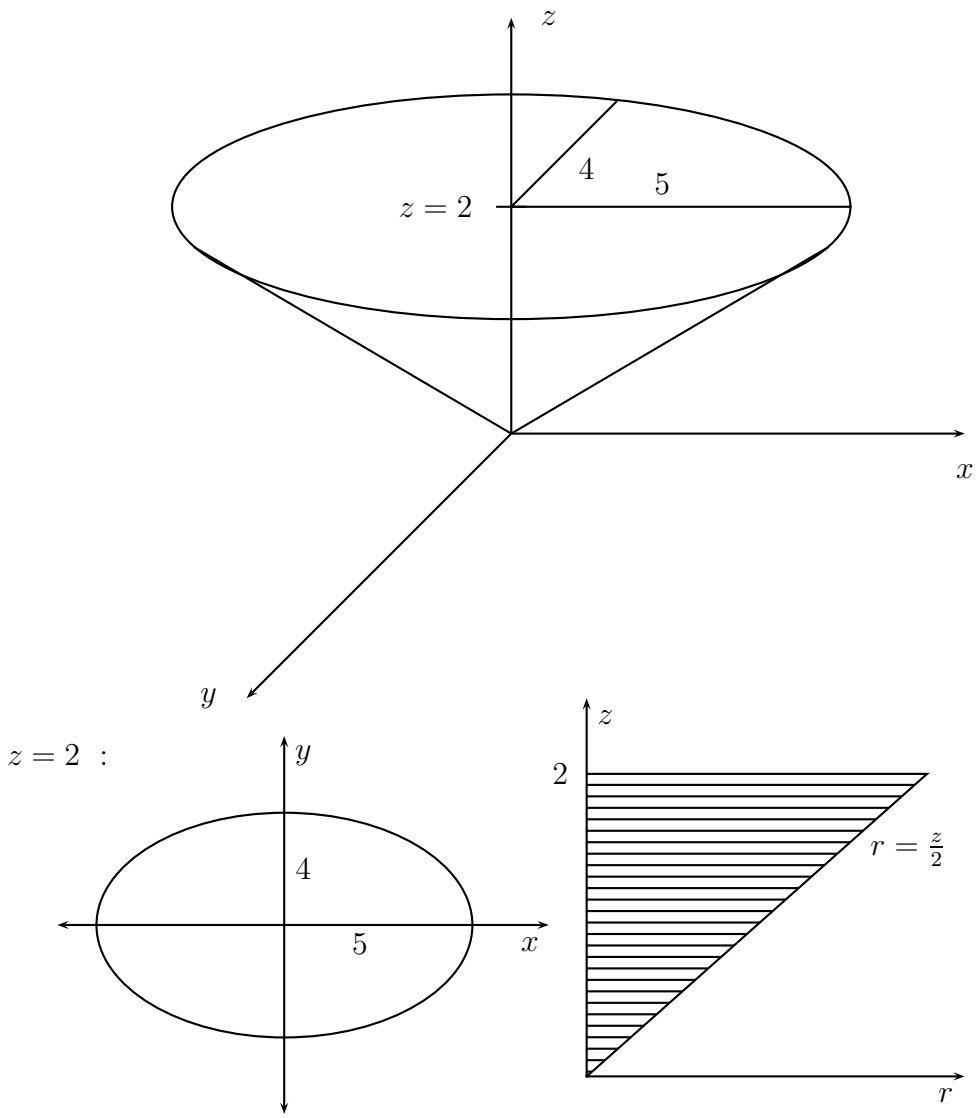

Abbildung 1: Skizze des elliptischen Kegels

Aufgabe 2. Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung

$$y^2e^x + 1 + (2ye^x - 1)y' = 0 \tag{2}$$

1. Zeigen Sie: Die Differentialgleichung (2) ist exakt.
2. Berechnen Sie das zugehörige Skalarfeld $\Phi = \Phi(x, y)$.
3. Bestimmen Sie aus der Gleichung

$$\Phi(x, y) = c \qquad (c = const.)$$

   die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung (2).
4. Berechnen Sie nun die Konstante c, so dass die im Punkt 3 erhaltene Lösung durch den Punkt $(0, 2) \in \mathbb{R}^2$ verläuft.

LÖSUNG

1. Überprüfen der Integrabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} p = y^2e^x + 1 \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}p = 2ye^x \\ q = 2ye^x - 1 \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}q = 2ye^x \end{aligned}$$

   zeigt $\frac{\partial}{\partial y}p = \frac{\partial}{\partial x}q$. Es handelt sich daher bei (2) um eine exakte DGL.
2. Aus $\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, y) = q$ folgt

$$\Phi(x, y) = \int (2ye^x - 1)\, dy = y^2e^x - y + C(x).$$

   Wegen $\frac{\partial}{\partial x}\Phi = p$ gilt weiter

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y) = y^2e^x + C' \stackrel{!}{=} y^2e^x + 1.$$

   Daher ergibt sich $C = x$ was auf

$$\Phi(x, y) = y^2e^x - y + x$$

   führt.
3. Auflösen der Gleichung

$$\Phi(x, y) = y^2e^x - y + x \stackrel{!}{=} c$$

   nach der Variablen y führt mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4e^x(x - c)}}{2e^x}$$

4. Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ führt auf

$$y(0) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2} \stackrel{!}{=} 2,$$

was $c = 2$ zeigt. Hierbei ist zu beachten, dass die Lösung mit dem negativen Vorzeichen der Wurzel nicht möglich ist. Es ergibt sich daher die Lösung

$$y = \frac{1 + \sqrt{1 - 4e^x(x-2)}}{2e^x}.$$

Aufgabe 3. Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + 4y' = \cos(2t) \tag{3}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{1}{20} \\ y'(0) &= -\frac{19}{5}. \end{aligned} \tag{4}$$

1. Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung $y_h = y_h(t)$ der Differentialgleichung (3).
2. Für die Berechnung einer partikulären Lösung verwenden Sie den Ansatz

   $$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$

   Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B.
3. Geben Sie die allgemeine Lösung $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ der Differentialgleichung (3) an.
4. Passen Sie die verbleibenden Konstanten in Ihrer allgemeinen Lösung so an, dass diese nun auch die Anfangsbedingungen (4) erfüllt.

LÖSUNG

1. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (3) lautet

   $$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

   und besitzt die Lösungen

   $$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -4.$$

   Die allgemeine Lösung von (3) lautet daher

   $$y_h(x) = C_1 + C_2 e^{-4t}.$$

2. Zweimaliges differenzieren der angegebenen Ansatzfunktion $y_p(t)$ und einsetzen in (3) führt auf

   $$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 8A\sin(2t) + 8B\cos(2t) = \cos(2t).$$

   Ein Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} 8A - 16B &= -2 \\ -8A - 4B &= 0 \end{aligned}$$

   mit der Lösung $A = -1/20$ und $B = 1/10$.

3. Die allgemeine Lösung von (3) lautet daher

   $$y_h(x) = C_1 + C_2 e^{-4t} - \frac{1}{20}\cos(2t) + \frac{1}{10}\sin(2t).$$

4. Zum Anpassen der verbleibenden Konstanten C_1 und C_2 muß die allgemeine Lösung aus Punkt 3 einmal differenziert werden. Anschließend setzt man die gegebenen Anfangsbedingungen ein und erhält

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{1}{20} = -\frac{1}{20} \\ y'(0) &= -4C_2 + \frac{1}{5} = -\frac{19}{5}. \end{aligned}$$

Das ergibt $C_1 = -1$ und $C_2 = 1$. Die gesuchte Lösung lautet daher

$$y(x) = -1 + e^{-4t} - \frac{1}{20}\cos(2t) + \frac{1}{10}\sin(2t).$$