Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2011/12

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (9. März 2012)

Gruppe bunt *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1. Die durch die Gleichung

$$\left(x^2+y^2-2bx\right)^2 = 4b^2\left(x^2+y^2\right), \qquad b>0,$$

gegebene Kurve – im Folgenden mit C bezeichnet – ist die sogenannte *Kardioide*.

a) Zeigen Sie, dass die Kurve in Polarkoordinaten die Darstellung $r(\varphi) = 2b(1+\cos\varphi)$ besitzt. Begründen Sie den Definitionsbereich von φ, nämlich $0 \le \varphi < 2\pi$.

b) Berechnen Sie das Bogenelement ds für eine unbekannte (!) Kurve, die in Polarkoordinaten als $\tilde{r} = \tilde{r}(\varphi)$ darstellbar ist. Setzen Sie dann in das Ergebnis $\tilde{r}(\varphi) = 2b(1+\cos\varphi)$ ein.
Hinweis: Die Kurve $\tilde{r}(\varphi)$ lautet in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \tilde{r}(\varphi)\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Kurvenlänge der Kardioide mit $ds = 2b\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi$. Hinweis: Benutzen Sie

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} 2b\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{4\sqrt{2}b\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}.$$

d) Berechnen Sie die von der Kardioide eingeschlossene Fläche.

LÖSUNG

a) Einsetzen von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

in die gegebene Gleichung und Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt (mit Verwendung der Identität $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

$$\begin{aligned} r^2 - 2br\cos\varphi &= \pm 2br \\ r(r - 2b\cos\varphi \pm 2b) &= 0. \end{aligned}$$

Laut Produktnullsatz ist die Gleichung erfüllt, wenn $r=0$ oder $r - 2b\cos\varphi \pm 2b = 0$. Für den zweiten Fall ergibt sich weiter

$$r = 2b(\pm 1 + \cos\varphi).$$

Die Lösung $r = 2b(-1+\cos\varphi)$ wird vernachlässigt, da $r \ge 0$ notwendig ist. Die Kurve in Polarform lautet also

$$r(\varphi) = 2b(1+\cos\varphi).$$

Die Lösung $r=0$ ist enthalten, da $r(\pi)$=0.
Der Definitionsbereich $0 \le \varphi < 2\pi$ gilt, da $r(\varphi)$ auf dem ganzen Bereich reell und nichtnegativ ist.

b) Das Bogenelement ds lautet

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \\ &= \sqrt{(\tilde{r}'(\varphi)\cos\varphi - \tilde{r}(\varphi)\sin\varphi)^2 + (\tilde{r}'(\varphi)\sin\varphi + \tilde{r}(\varphi)\cos\varphi)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{\tilde{r}'(\varphi)^2 + \tilde{r}(\varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Bei Einsetzen von $\tilde{r}(\varphi) = 2b(1+\cos\varphi)$ ergibt sich

$$ds = 2b\sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (1+\cos\varphi)^2} d\varphi = 2b\sqrt{2+2\cos\varphi} d\varphi$$

c)

$$\begin{aligned} \int_C ds &= 4\int_{\varphi=0}^{\pi} \sqrt{2}b \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}\, d\varphi = \left| \begin{array}{rcl} u &=& 1-\cos\varphi \\ du &=& \sin\varphi\, d\varphi \end{array} \right| \\ &= 4\sqrt{2}b \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = 8\sqrt{2}b\sqrt{u}\Big|_{u_0}^{u_1} = 8\sqrt{2}b\sqrt{1-\cos\varphi}\Big|_{\varphi=0}^{\pi} = \\ &= 16b. \end{aligned}$$

Den angegebenen Zusammenhang zw. den Integralen (nicht Teil der Aufgabe) zeigt man übrigens auf folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\cos\varphi} &= \sqrt{\frac{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}{1-\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}} \\ &= \frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{1-\cos\varphi}} \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\, d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{1-\cos\varphi}}\, d\varphi = 2\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}\, d\varphi. \end{aligned}$$

Da die x-Achse eine Symmetrieachse der Figur ist, kann man das Integral auf das Intervall $0 < \varphi < \pi$ beschränken und diese Größe verdoppeln. Weil $\sin\varphi$ auf diesem Intervall positiv ist, gilt $|\sin\varphi| = \sin\varphi$.

d)

$$\begin{aligned} \int_C dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2b(1+\cos\varphi)} \overbrace{r}^{FD}\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{2b(1+\cos\varphi)} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{4b^2(1+\cos\varphi)^2}{2}\, d\varphi = 2b^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi \\ &= 2b^2(2\pi+0+\pi) = 6b^2\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Die Funktionen u, v, w seien gegeben durch

$$u(x,y,z) := 2x^2 + xz, \quad v(x,y,z) := 2xz, \quad w(x,y,z) := y^2.$$

Diese bilden ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ durch die Festsetzung

$$\mathbf{F}(x,y,z) := \big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\big)^{\mathrm{T}}.$$

a) Berechnen Sie

$$\operatorname{div}\mathbf{F} := \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w.$$

Bestimmen Sie den Normalvektor auf die durch $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ gegebene Ebene.

b) Sei $\mathbf{C_1}$ eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r_1}(t) := (t, t^2, 1)^{\mathrm{T}}$ von $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ nach $(4,16,1)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ entlang der Kurve $\mathbf{C_1}$.

c) Sei $\mathbf{C_2}$ eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r_2}(t) := (t, 4t, 1)^{\mathrm{T}}$ von $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ nach $(4,16,1)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ entlang der Kurve $\mathbf{C_2}$.

d) Ist $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld?

LÖSUNG

a)

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 + xz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2xz\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\right) = 4x + z$$

Bei gegebenem Normalvektor $\mathbf{n}$ bestimmt man die Ebenengleichung durch

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0.$$

Daraus folgt: der Normalvektor ist gegeben durch $\mathbf{n} = (4, 0, 1)$.

b)

$$\int_{\mathbf{C_1}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\, ds = \int_0^4 \mathbf{F}(\mathbf{r_1}(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\, dt = \int_0^4 \begin{pmatrix} 2t^2 + t \\ 2t \\ t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^4 (2t^2 + t + 4t^2)\, dt = \int_0^4 (6t^2 + t)\, dt = 6\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\bigg|_0^4 = 136.$$

c)

$$\int_{\mathbf{C_2}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\, ds = \int_0^4 \mathbf{F}(\mathbf{r_2}(t)) \cdot \mathbf{r_2}'(t)\, dt = \int_0^4 \begin{pmatrix} 2t^2 + t \\ 2t \\ 16t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^4 (2t^2 + t + 8t)\, dt = \int_0^4 (2t^2 + 9t)\, dt = 2\frac{t^3}{3} + 9\frac{t^2}{2}\bigg|_0^4 = \frac{344}{3}.$$

d) Nein, da das Ergebnis der Kurvenintegrale zwischen denselben Punkten vom Weg abhängt.

Aufgabe 3.

a) Geben Sie eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung an, die

$$y(t) = 5\,e^{-8t}\cos(8t)$$

als Lösung besitzt.

b) Geben Sie die Lösung(en) $y(t)$ für die Differentialgleichung

$$\frac{y'}{y} = t\sin t$$

an. Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

c) Berechnen Sie für die Differentialgleichung

$$(4y - 6x + 4)\,dx + 2x\,dy = 0$$

den integrierenden Faktor $m(x)$, sodass sie zu einer exakten Differentialgleichung wird. Geben Sie dann ein erstes Integral an.
Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung mit $m(x)$ und überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen – Produktregel nicht vergessen!

LÖSUNG

a) Laut Skriptum S. 108, Formel (5.25), ist die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$y(t) = e^{-\frac{p}{2}t}\big(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\big).$$

Durch Vergleich ergibt sich sofort $p = 16$ und $\omega = 8$. Einsetzen dieser Größen in

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$$

und einfaches Umformen ergibt $q = 128$. Die DGL lautet also

$$y'' + 16y' + 128y = 0.$$

b) Durch Separation der Variablen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} &= t\sin t \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int t\sin t\,dt \\
\ln y &= \int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + C \\
y &= e^{-t\cos t + \sin t + C} = \tilde{C}e^{-t\cos t + \sin t}.
\end{aligned}$$

c) Die Gleichung wird durch 2 dividiert und mit dem integrierenden Faktor (laut Angabe nur von x abhängig) multipliziert:

$$\underbrace{(2y-3x+2)\,m(x)}_{a(x,y)}\,dx+\underbrace{x\,m(x)}_{b(x,y)}\,dy=0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen lauten nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}a(x,y) &= 2m(x)\\ \frac{\partial}{\partial x}b(x,y) &= m(x)+x\,m'(x).\end{aligned}$$

Nun muss $\frac{\partial}{\partial y}a(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}b(x,y)$ gelten, also

$$\begin{aligned}2m(x) &= m(x)+x\,m'(x)\\ m(x) &= x\,\frac{dm}{dx}\\ \int\frac{1}{x}dx &= \int\frac{1}{m}dm\\ \ln x+C &= \ln m\\ m &= \tilde{C}x.\end{aligned}$$

Da nur ein integrierender Faktor gesucht ist, kann man $\tilde{C}=1$ setzen; damit ist $m(x)=x$. Ein erstes Integral berechnet man durch Integration von a und b:

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int(2xy-3x^2+2x)dx=x^2y-x^3+x^2+C(y)\\ \Phi(x,y) &= \int x^2dy=x^2y+C(x).\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das

$$\Phi(x,y)=x^2y-x^3+x^2.$$