Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2013/14

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (14. März 2014)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

Es soll getestet werden, ob das Roulettespiel "fair" ist. An einem Abend im Casino wird die Kugel 400 Mal geworfen und dabei wird das Auftreten der Zahl "26" gezählt.

a) Wie lautet die Nullhypothese?
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die das Auftreten einer Zahl beschreibt, falls man annimmt, dass die Nullhypothese korrekt ist! Skizzieren Sie diese Wahrscheinlichkeitsverteilung! Wie oft erwartet man, dass die Zahl "26" geworfen wird?

b) Führen Sie den Test auf einem Signifikanzniveau von 0.05 unter der Verwendung des Satzes von de Moivre/Laplace durch! Wie lauten die untere Grenze und die obere Grenze für das Auftreten der Zahl "26", bis zu der das Roulette noch als fair angenommen werden kann?

Hinweise:

1. *Beim Roulettespiel gibt es 37 verschiedene Zahlen, die geworfen werden können.*
2. *Untenstehend ist eine Wertetabelle für die Standardnormalverteilung angegeben.*
   Dabei ist in den Spalten die zweite Nachkommastelle von z aufgetragen, für die in den Zeilen der Platzhalter $*$ steht.
3. *Es gilt* $\sqrt{400 \cdot \frac{36}{37^2}} \approx 3.2$.

LÖSUNG

a) Die Nullhypothese lautet: "Das Roulette ist fair."
Unter der Annahme, dass diese Nullhypothese stimmt, gehorcht das Auftreten einer Zahl beim Roulette einer Binomialverteilung mit folgenden Parametern.

$$p = \frac{1}{37} \qquad q = \frac{36}{37} \qquad n = 400$$
$$\Rightarrow P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{37}\right)^k \left(\frac{36}{37}\right)^{400-k}$$

Der Erwartungswert dieser Verteilung lautet:

$$E(X) = n \cdot p = \frac{400}{37} \approx 10.81$$

Man erwartet also, dass die Zahl "26" im Lauf des Abends ungefähr 11 Mal auftritt.

b) Die Nullhypothese muss verworfen werden, falls die Zahl "26" zu selten oder zu häufig geworfen wird. Das Signifikanzniveau bestimmt die Größe des Bereichs, in dem die beobachtete Anzahl X liegen muss, um die Nullhypothese zu verwerfen.

$$\begin{aligned} P(X \leq \Gamma) &= \sum_{k=0}^{\Gamma} P(X = k) \leq 0.025 \\ P(X \geq \Delta) &= \sum_{k=\Delta}^{400} P(X = k) \leq 0.025 \end{aligned}$$

Gesucht sind nun die Zahlen Γ und Δ, wobei Γ die größtmögliche Zahl und Δ die kleinstmögliche Zahl ist, für die obige Ungleichung gerade noch erfüllt wird.
Zur Berechnung wird der Satz von de Moivre/Laplace angewendet. Falls die Größe k binomialverteilt ist, gehorcht z asymptotisch einer Standardnormalverteilung

$$z = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Obige Ungleichung wird zu:

$$\Phi(\gamma) \leq 0.025 \qquad mit \qquad \gamma = \frac{\Gamma - np}{\sqrt{npq}}$$
$$1 - \Phi(\delta) \leq 0.025 \qquad \rightarrow \Phi(\delta) \geq 0.975 \qquad mit \qquad \delta = \frac{\Delta - np}{\sqrt{npq}}$$

Mit Hilfe obiger Tabelle findet man:

$$\begin{aligned} \gamma &\leq -1.96 \quad \Rightarrow \quad \Gamma \leq -1.96 \cdot \sqrt{npq} + np \approx 4.538 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = 4 \\ \delta &\geq 1.96 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq 1.96 \cdot \sqrt{npq} + np \approx 17.082 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 18 \end{aligned}$$

Falls die Zahl "26" höchstens 4 Mal oder mindestens 18 Mal geworfen würde, müsste die Nullhypothese, dass das Roulette fair ist, verworfen werden.

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie die Lösung folgender gewöhnlicher Differentialgleichung und stellen Sie die Lösungsfunktion in der Form $y(x)$ dar.

$$y'(x) = 2\sqrt{\frac{x^2 - x^2 y}{1 + x^2}}$$

b) Wie lautet die Lösung des folgenden Randwertproblems?

$$u''(t) + 2u'(t) - 3u(t) = 6, \qquad u(t = 0) = u'(t = 2) = 0$$

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{\frac{x^2 - x^2 y}{1 + x^2}} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-y}}\, dy &= \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\
&\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-y}}\, dy \overset{u=1-y}{=} -\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = -2\sqrt{1-y} \\
&\Rightarrow \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \overset{u=1+x^2}{=} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = 2\sqrt{1+x^2} \\
\Rightarrow -2\sqrt{1-y} &= 2\sqrt{1+x^2} \\
1 - y &= 1 + x^2 \\
y &= -x^2 + C
\end{aligned}$$

b) i) Bestimmung der Lösung der homogenen Gleichung $u''(t) + 2u'(t) - 3u(t) = 0$:
Die Verwendung des Ansatzes $u(t) = Ce^{\lambda t}$ führt auf das charakteristische Polynom der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + 2\lambda - 3 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda_{1,2} &= -1 \pm 2.
\end{aligned}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also:

$$u_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}.$$

ii) Die Partikulärlösung dieser Differentialgleichung erhält man entweder über die Variation der Konstanten oder über einen geeigneten Ansatz.
1. Variante: Variation der Konstanten
Der Ansatz $u_p(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-3t}$ führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-3t} &= 0 \\
C_1'(t)e^t - 3C_2'(t)e^{-3t} &= 6,
\end{aligned}$$

welches durch

$$C_1'(t) = \frac{3}{2}e^{-t} \qquad C_2'(t) = -\frac{3}{2}e^{3t}$$

gelöst wird.
Integration dieser Ausdrücke und das Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz führt auf die Partikulärlösung.

$$C_1(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{2}e^{3t}$$
$$u_p(t) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

2.Variante: Ansatz
Durch Wahl eines Ansatzes, der sich an der Struktur der Inhomogenität orientiert, erhält man obiges Ergebnis viel schneller. $u_p = C$ ergibt durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$-3C = 6 \qquad \Rightarrow \qquad C = -2 \qquad \Rightarrow \qquad u_p = -2$$

iii) Die Lösung des Randwertproblems findet man durch Einsetzen.

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1e^t + C_2e^{-3t} - 2 \\ u'(t) &= C_1e^t - 3C_2e^{-3t} \\ u(t=0) = 0 \qquad &\Rightarrow C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ u'(t=2) = 0 \qquad &\Rightarrow C_1e^2 - 3C_2e^{-6} = 0 \end{aligned}$$

Die Konstanten erhält man durch Lösung des Gleichungssystems. Sie ergeben sich zu:

$$C_1 = \frac{6}{e^8+3} \qquad C_2 = \frac{2}{1+3e^{-8}}.$$

Die Lösung des Randwertproblems lautet schließlich:

$$u(t) = \frac{6e^t}{e^8+3} + \frac{2e^{-3t}}{1+3e^{-8}} - 2.$$

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Feld

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2y^2 + 2y\sin x \\ 4x^3y - 2\cos x \end{pmatrix}.$$

a) Machen Sie sich die Tatsache, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, durch Überprüfen der Integrabilitätsbedingung plausibel.

b) Gegeben sind Punkte $P_1 = (0,0), P_2 = (1,1), P_3 = (3,0), P_4 = (4,0)$. Durch Zusammenfügen der geradlinigen Strecken $\overrightarrow{P_4P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ entsteht eine Kurve C von P_4 nach P_1 (*Skizze!*).

   i) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve C an.

   ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ entlang C.

c) Gegeben sei das Feld

$$\tilde{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix}.$$

Nehmen Sie als bekannt an, dass $\tilde{\mathbf{F}}$ ein Gradientenfeld ist. Gegeben sei eine Kurve $\tilde{C}$ mit der Parametrisierung

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\pi].$$

Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{r}}(0)$ und $\tilde{\mathbf{r}}(\pi)$ und geben Sie den Wert des Kurvenintegrals von $\tilde{\mathbf{F}}$ entlang dieser Kurve $\tilde{C}$ an!

Geben sie alle Zwischenrechnungen und Begründungen an!

LÖSUNG

a) Die Integrabilitätsbedingung für $\mathbf{F}$ lautet

$$\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y). \tag{1}$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y) = 12x^2y + 2\sin x,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y) = 12x^2y + 2\sin x$$

ist (1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

b) i) Eine mögliche Parametrisierung $\mathbf{r_1}(t)$ für die Strecke $\overrightarrow{P_4P_3}$ ist

$$\mathbf{r_1}(t) = P_4 + t(P_3 - P_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Analog erhält man Parametrisierungen $\mathbf{r_2}(t)$ und $\mathbf{r_3}(t)$ für $\overrightarrow{P_3P_2}$ bzw. $\overrightarrow{P_2P_1}$:

$$\mathbf{r_2}(t) = P_3 + t(P_2 - P_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

$$\mathbf{r_3}(t) = P_2 + t(P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Will man eine Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ der gesamten Kurve C, müssen die einzelnen Strecken geschickt zusammenfügt werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r_1}(t), & t \in [0,1], \\ \mathbf{r_2}(t-1), & t \in [1,2], \\ \mathbf{r_3}(t-2), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

ii) Das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ entlang C ist definiert durch

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Da aber $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, hängt der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab und wir können die (relativ umständliche) Berechnung des obigen Integrals umgehen, indem wir statt C die direkte Verbindung von P_4 mit P_1, also die Strecke $\overrightarrow{P_4P_1}$ wählen. Deren Parametrisierung ist (zum Beispiel)

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = P_4 + t(P_1 - P_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Damit ergibt sich

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\overrightarrow{P_4P_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}(t)) \cdot (\hat{\mathbf{r}})'(t)\, dt = \int_0^1 \underbrace{\mathbf{F}(4-4t, 0)}_{\begin{pmatrix} 0 \\ -2\cos(4-4t) \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

Bemerkung: Alternativ kann das Kurvenintegral (durch die Tatsache dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist) über das Potential $\Phi(x,y) = 2x^3y^2 - 2y\cos x$ berechnet werden mit:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}_1(t)) \cdot (\hat{\mathbf{r}}_1)'(t)\, dt = \Phi(\hat{\mathbf{r}}_1(1)) - \Phi(\hat{\mathbf{r}}_1(0)) = 0.$$

c)

$$\tilde{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(\pi) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\tilde{\mathbf{F}}$ ein Gradientenfeld ist, hängt der Wert des Kurvenintegrals wieder nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab:

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(0) + t(\tilde{\mathbf{r}}(\pi) - \tilde{\mathbf{r}}(0)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\tilde{C}} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\overrightarrow{\tilde{r}(0)\tilde{r}(\pi)}} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot (\tilde{\mathbf{r}})'(t)\, dt = \int_0^1 \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}(4-8t,0)}_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0.$$