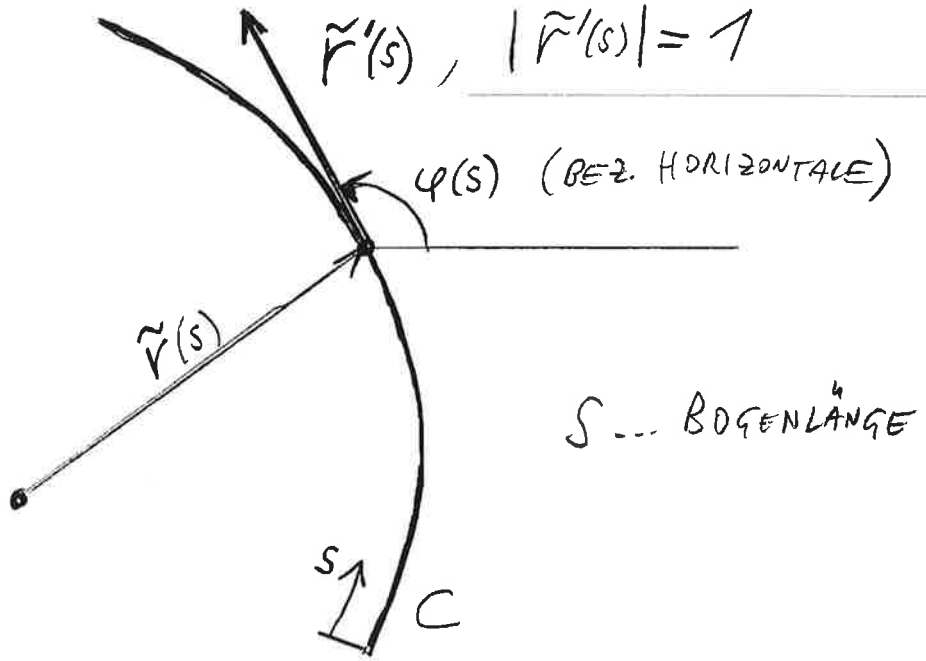
AUFGABE 3.17: MAN ZEIGE, DASS FÜR EINE EBENE KURVE DIE KRÜMMUNG $K(s)$ DURCH $d\varphi/ds$ GEGEBEN IST, WOBEI $\varphi = \varphi(s)$ DER NEIGUNGSWINKEL DES TANGENTIALVEKTORS IST.

LÖSUNG:



- LAUT FORMALER DEFINITION DER KRÜMMUNG IST

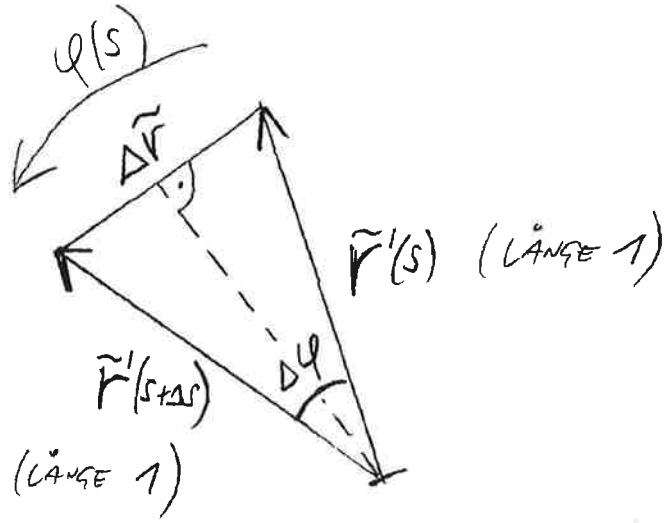
$$K(s) = |\tilde{r}''(s)|, \quad \text{MIT} \quad |\tilde{r}'(s)| = 1,$$

WOBEI

$$\tilde{r}''(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overbrace{\tilde{r}'(s+\Delta s) - \tilde{r}'(s)}^{=:\,\Delta\tilde{r}}}{\Delta s}$$

3.17

SKIZZE:



IN DIESEM GLEICHSCHENKELIGEN DREIECK GILT

$$\frac{|\Delta\tilde{r}|}{2} = |\tilde{r}(s)| \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

UND DAHER

$$|\Delta\tilde{r}| = 2\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \Delta\varphi + O(|\Delta\varphi|^2)$$

$\Longrightarrow$

$$|\tilde{r}''(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\tilde{r}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi + O(|\Delta\varphi|^2)}{\Delta s}$$

MIT DER FUNKTION $\varphi = \varphi(s)$ (NEIGUNGSWINKEL).

$$\Longrightarrow \quad \kappa(s) = |\tilde{r}''(s)| = \frac{d\varphi}{ds}.$$

$\square$