Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger

WS 2014/2015

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest am 13. März 2015

Gruppe 1 *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

Die Verwendung eines ein-, zweizeiligen (nicht programmierbaren, nicht grafikfähigen) Taschenrechners und des eigenen Skriptums sind erlaubt.

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Die Kurve C eines Massenpunkts sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} (\sin t)^{3/2} \\ \sin t + 1 \\ \sqrt{3}\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Sie verbindet die Punkte $A = \boldsymbol{r}(0)$ und $B = \boldsymbol{r}(\frac{\pi}{2})$.

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve C. Geben Sie auch die Länge $s(\frac{\pi}{2})$ der gesamten Kurve an.
Hinweis: Verwenden Sie eine Substitution der Form $u = a\sin t + b$ mit einer geeigneten Wahl für die reellen Konstanten a und b.

b) Geben Sie eine Parametrisierung von C über die Bogenlänge s an.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABO (O bezeichnet den Ursprung).

d) Ein einfallsloserer Massenpunkt bewegt sich entlang der Geraden, die A und B verbindet. Geben Sie eine Parameterdarstellung für diese Gerade an und bestimmen Sie den Punkt, an dem sie die Ebene $2x - y = 1$ schneidet.

e) Welchen Normalabstand hat die Ebene $2x - y = 1$ vom Ursprung?

LÖSUNG

a)

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\sin t}\cos t \\ \cos t \\ \sqrt{3}\cos t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{\frac{9}{4}\sin t(\cos t)^2 + 4(\cos t)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\cos t\sqrt{9\sin t + 16}\,\mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{r}}(t')|\,\mathrm{d}t' = \begin{vmatrix} u = 9\sin t + 16 \\ \mathrm{d}u = 9\cos t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{18}\int_{16}^{9\sin t+16} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{27}u^{3/2}\Big|_{16}^{9\sin t+16} = \frac{1}{27}\left[(9\sin t + 16)^{3/2} - 64\right]$$

Damit folgt für die Länge der gesamten Kurve C: $s(\frac{\pi}{2}) = \frac{125-64}{27} = \frac{61}{27}$.

b)

$$(27s + 64)^{2/3} = 9\left(s + \frac{64}{27}\right)^{2/3} = 9\sin t + 16 \qquad \Rightarrow \sin t = \left(s + \frac{64}{27}\right)^{2/3} - \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \begin{pmatrix} \left(\left(s + \frac{64}{27}\right)^{2/3} - \frac{16}{9}\right)^{3/2} \\ \left(s + \frac{64}{27}\right)^{2/3} - \frac{7}{9} \\ \sqrt{3}\left(s + \frac{64}{27}\right)^{2/3} - \frac{16\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad 0 \le s \le \frac{61}{27}$$

c) Eine Möglichkeit, den Flächeninhalt zu berechnen, ist beispielsweise über den halben Betrag des Normalvektors: $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|$.

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}(0) = (0,1,0), \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (\sqrt{3},0,-1) \quad \Rightarrow \quad F = 1$$

d) Zur Parameterdarstellung:

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}(t) = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = (t, 1+t, \sqrt{3}t)$$

Für die Berechnung des Schnittpunktes ist die Parameterdarstellung in die Ebenengleichung einzusetzen:

$$2x(t) - y(t) = 2t - (1+t) = t - 1 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Daher schneidet die Gerade die Ebene im Punkt $(2,3,2\sqrt{3})$.

e) Den Normalabstand können wir bestimmen, indem wir eine Gerade durch den Ursprung in Richtung des Normalvektors der Ebene aufstellen und sie mit der Ebene schneiden. Der Normalvektor kann aus der Ebenengleichung abgelesen werden: $\boldsymbol{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, wenn der Punkt (x_0, y_0, z_0) in der Ebene liegt. Daher bringen wir die Ebenengleichung in diese Gestalt:

$$2x - y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-0) + (-1)\cdot(y+1) + 0 \cdot (z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n} = (2,-1,0)$$

Am einfachsten kann der Abstand berechnet werden, wenn die Gerade über die (postivie oder negative) Weglänge ausgehend vom Ursprung parameterisiert wird. Dafür muss der Einheitsvektor zu $\boldsymbol{n}$ gebildet werden: $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{5} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{n}} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0)$. Für die Parameterdarstellung ergibt sich $\boldsymbol{h}(s) = s \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$. Nun ist der Schnittpunkt zu berechnen:

$$\frac{4}{\sqrt{5}}s + \frac{1}{\sqrt{5}}s = \sqrt{5}s \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

2.1) Berechnen Sie

$$\iiint\limits_B z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei B die obere Halbkugel mit Radius 2 um den Ursprung bezeichnet.

2.2) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x)+\frac{1}{x}\,y(x)=x^2+1,\qquad y(1)=2\,.$$

LÖSUNG

2.1) Das Integral wird in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi\\ y &= r\sin\theta\sin\phi\\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

gelöst. Für die obere Halbkugel mit Radius 2 und dem Ursprung als Mittelpunkt gilt $0\le r\le 2$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ und $0\le\phi<2\pi$. Die Funktionaldeterminante ist $r^2\sin\theta$.

$$\begin{aligned} \iiint\limits_B z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^4\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\frac{2^5}{5}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= [\text{Substitution: } \sin\theta=u\,,\ \cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}u] = \frac{64\pi}{5}\int_0^1 u^2\mathrm{d}u = \frac{64\pi}{15}\,. \end{aligned}$$

2.2) Zuerst wird die homogene Differentialgleichung

$$y'=-\frac{y}{x}$$

mittels Separation der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}\,,\\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x}\,,\\ \ln y &= -\ln(x)+C=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+C\,,\\ y &= \frac{c}{x}\,,\qquad c\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Die Methode der Variation der Konstanten zur Berechnung der Partikulärlösung:

$$y_p(x) = \frac{c(x)}{x}\,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} y_p' + \frac{y_p}{x} &= \frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = x^2 + 1\,, \\ \frac{c'}{x} &= x^2 + 1 \implies c'(x) = x^3 + x \implies c(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\,. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2}\,,$$

wobei sich aus der Anfangsbedingung $y(1) = 2$

$$y(1) = c + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 \implies c = \frac{5}{4}$$

ergibt.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

3.1) Ein diagnostisches Verfahren überprüft, ob eine Person eine bestimmte Krankheit hat. 20 Prozent der Bevölkerung haben diese Krankheit. In einer klinischen Studie bekommen 95 Prozent der Personen, die tatsächlich diese Krankheit haben und 10 Prozent der Personen, die nicht erkrankt sind, ein positives Testergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass...

a) eine Person die Krankheit hat, wenn das Testergebnis positiv ist.

b) eine Person die Krankheit hat, wenn das Testergebnis negativ ist.

3.2) Für ein Gerät ist die Zeit bis es versagt exponentialverteilt mit Mittelwert 10 Stunden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät nach 12 Stunden noch funktioniert?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät nach 12 Stunden funktioniert, wenn man annimmt, dass es schon 8 Stunden funktioniert hat?

3.3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf Personen zumindest zwei im gleichen Sternzeichen geboren sind? (Gehen Sie davon aus, dass alle 12 Sternzeichen gleichwahrscheinlich sind.)

LÖSUNG

1. Sei K das Ereignis, das eine Person die Krankheit hat und K^C das Ereignis, das eine Person gesund ist.

   Sei E das Ereignis, dass das Testergebnis positiv ist und E^C das Ereignis, dass das Testergebnis negativ ist.

   Es sind vier relevante Fälle zu betrachten:

   - $P(K \cap E) = 0.2 * 0.95\,,$
   - $P(K \cap E^C) = 0.2 * 0.05\,,$
   - $P(K^C \cap E) = 0.8 * 0.1\,,$
   - $P(K^C \cap E^C) = 0.8 * 0.9\,.$

   Mit dem Satz von Bayes (siehe Skriptum) folgt:

   (a) $P(K|E) = \frac{P(K \cap E)}{P(E)} = \frac{0.2*0.95}{0.2*0.95+0.8*0.1} = \frac{19}{27} \approx 0.7037\,,$

   (b) $P(K|E^C) = \frac{P(K \cap E^C)}{P(E^C)} = \frac{0.2*0.05}{0.2*0.05+0.8*0.9} = \frac{1}{73} \approx 0.0137\,.$

2. Sei T die Zeit (in Stunden) bis das Gerät kaputt ist.

   Dann folgt $\frac{1}{\lambda} = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{10}$ und daher

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$
$$\Longrightarrow P(T > 12) = e^{-\frac{12}{10}} \approx 0.3012$$

Weiters gilt

$$P(T > 12 \,|\, T > 8) = \frac{P(T > 12)}{P(T > 8)} = \frac{e^{-\frac{12}{10}}}{e^{-\frac{8}{10}}} \approx 0.6703$$
$$(= P(T > 4))$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Personen verschiedene Sternzeichen haben, ist

$$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} \approx 0.382\,.$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest zwei Personen im gleichen Sternzeichen geboren sind, die Gegenwahrscheinlichkeit, also

$$1 - 0.382 \approx 0.618\,.$$