1. **DGL 2. Ord., innere und äußere Resonanz.** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t$$

nach $y = y(t)$.

Lösung. $y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t + \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$

2. **DGL 2. Ord., innere Resonanz und Sinusanregung.** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = \sin(2t)$$

nach $y = y(t)$. Verwenden Sie zum Auffinden einer partikulären Lösung den Ansatz

$$y_p(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t).$$

Lösung. $y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2 x\mathrm{e}^t + \frac{4}{25}\cos(2t) - \frac{3}{25}\sin(2t)$

3. **DGL 2.Ord., Ordnungsreduktion.** Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$(4t+1)y'' + (8t-2)y' + (-12t-15)y = 0 \tag{1}$$

Eine der Lösungen hat die Form $y_1(t) = e^{\lambda t}$. Bestimmen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung mit Hilfe des Koeffizientenvergleichs den Wert für λ.
Berechnen Sie weiters mit Hilfe von $y_1(t)$ eine zweite linear unabhängige.
Lösung. $\lambda = -3$, z.B.: $y_2(t) = c(t)y_1(t) = t\mathrm{e}^t$

4. **Lineare DGL 3. Ord, DGL-System.** Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$x''' + 2x'' + x' = 2\mathrm{e}^{3t}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x_h der entsprechenden homogenen Differentialgleichung mit dem Ansatz $x_h = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Die homogene Lösung x_h ist eine Linearkombination von drei Fundamentallösungen.

(b) Verwenden Sie weiters zur Berechnung einer Partikulärlösung einen geeigneten Ansatz. Geben Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung an.

(c) Setzen Sie $x' =: y$, $x'' =: z$ und sei $\boldsymbol{v} := (x, y, z)^T$ mit $\boldsymbol{v}' = (x', y', z')^T$. Mit Hilfe von $\boldsymbol{v}$ kann nun die homogene Differentialgleichung 3.Ordnung als ein System 1.Ordnung $\boldsymbol{v}' = A\boldsymbol{v}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ formuliert werden. Geben Sie die Matrix A an.

(d) Geben Sie in der Notation aus (c) die Lösung der Differentialgleichung in der Vektorform $\boldsymbol{v}$ an.
Hinweis: Berechnen Sie $z' = x'''$ aus der gegebenen Differentialgleichung.

Lösung. (a) $x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2 t\mathrm{e}^{-t} + C_3$, (b) $x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2 t\mathrm{e}^{-t} + C_3 + \frac{1}{24}\mathrm{e}^{3t}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, (d) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\mathrm{e}^{-t} + C_3$