1. **Fourierreihe.** Die Funktion $f(x) = 5(\pi - x)^2$, für $x \in [0, 2\pi]$, wird für $x \in \mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt.

   (a) Berechnen Sie die Fourierreihe $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ der Funktion f.

   (b) Berechnen Sie insbesondere die Fourierkoeffizienten a_0, a_3, b_1.

   Lösung. $a_0 = \frac{10}{3}\pi^2,\ a_3 = \frac{20}{9},\ b_1 = 0$

2. **Exakte DGL.** Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$y\cos(x) + 2x\mathrm{e}^y + (\sin(x) + x^2\mathrm{e}^y - 1)y' = 0.$$

   (a) Prüfen Sie, ob diese exakt ist.

   (b) Berechnen Sie ein erstes Integral, also das zugehörige Potential Φ.

   Lösung. $\Phi(x, y) = y\sin(x) + x^2\mathrm{e}^y - y + C_0$

3. **Separationsansatz.** Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$t^2 u_t + \frac{1}{x} u_x = u.$$

   Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x, t) = v(t)w(x)$ für den Anfangswert $u(0, 1) = 1$.

   Lösung. $u(x, t) = C \exp\left(\frac{1}{2}x^2(1 - \ln(C)) - \frac{\ln(C)}{t})\right)$

4. **Euler DGL.** Lösen Sie die Eulersche Differentialgleichung

$$4t^2x'' - tx' + x = 2t^4,$$

   mit den Anfangsbedingungen $x(1) = 0$ und $x'(1) = 0$.

   Lösung. $x(t) = \frac{8}{45}\sqrt[4]{t} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{45}t^4$

5. **Bernoulli DGL.** Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2tx = 2t^3x(t)^3.$$

   Lösung. $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2+4\exp(2t^2)C+4t^2}}$

6. **Potenzreihenansatz.** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$$

   mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ mit einem Potenzreihenansatz.

   (a) Wählen Sie einen Ansatz $y = y(x)$ durch eine Potenzreihe mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

   (b) Berechnen Sie Ableitungen $y'(x)$ und $y''(x)$ der Potenzreihe.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Lösung. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}$

7. **Weihnachtsintegral.** Berechnen Sie das Integral

$$I = \int \sqrt{\tan(x)}\, \mathrm{d}x.$$

mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

Lösung: $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{\tan x}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{\tan x} + \frac{1}{\sqrt{\tan x}} - \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x} + \frac{1}{\sqrt{\tan x}} + \sqrt{2}}\right) + C$