1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \sin(2t)$$

nach $y = y(t)$. Verwenden Sie zum Auffinden einer partikulären Lösung den Ansatz

$$y_p(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t).$$

Lösung. $y(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 x \mathrm{e}^t + \frac{4}{25}\cos(2t) - \frac{3}{25}\sin(2t)$

2. Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$(4t+1)\ddot{y} + (8t-2)\dot{y} + (-12t-15)y = 0$$

Eine der Lösungen hat die Form $y_1(t) = e^{\lambda t}$. Bestimmen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung mit Hilfe des Koeffizientenvergleichs den Wert für λ. Berechnen Sie weiters mit Hilfe von $y_1(t)$ eine zweite linear unabhängige Lösung.

Lösung. $\lambda = -3$, $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 t \mathrm{e}^{4t}$

3. Lösen Sie die inhomogene Differentiagleichung

$$(4t+1)\ddot{y} + (8t-2)\dot{y} + (-12t-15)y = \mathrm{e}^t,$$

mit Verwendung von Resultaten aus dem Beispiel 2.

Lösung. $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 t \mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t$

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 2\mathrm{e}^{3t}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x_h der entsprechenden homogenen Differentialgleichung mit dem Ansatz $x_h = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Die homogene Lösung x_h ist eine Linearkombination von drei Fundamentallösungen.

(b) Verwenden Sie weiters zur Berechnung einer Partikulärlösung einen geeigneten Ansatz. Geben Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung an.

(c) Setzen Sie $y := \dot{x}$, $z := \ddot{x}$ und sei $\boldsymbol{v} := (x, y, z)^T$ mit $\dot{\boldsymbol{v}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$. Mit Hilfe von $\boldsymbol{v}$ kann nun die homogene Differentialgleichung 3. Ordnung als ein System 1. Ordnung $\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ formuliert werden. Geben Sie die Matrix A an.

(d) Geben Sie in der Notation aus (c) die Lösung der Differentialgleichung in der Vektorform $\boldsymbol{v}$ an.

Hinweis: Berechnen Sie $\dot{z} = \dddot{x}$ aus der gegebenen Differentialgleichung.

Lösung. (a) $x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 t \mathrm{e}^{-t} + c_3$,

(b) $x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 t \mathrm{e}^{-t} + c_3 + \frac{1}{24}\mathrm{e}^{3t}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

5. Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = 6\ln(\cos(2x)).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Lösung. $T_3(x) = -12x^2$

6. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y} = t\mathrm{e}^y,$$

mit $y = y(t)$.

(a) Verwenden Sie das Taylor-Polynom zu e^x und geben Sie zwei lösbare Approximationen der Differentialgleichung an. Berechnen Sie die Lösung dieser Differentialgleichungen jeweils für $y(0) = 0$.

(b) Lösen Sie die originale Differentialgleichung mit der Methode des Trennens der Variablen und vergleichen Sie die Lösung mit jenen aus (a).

(c) Vergleichen Sie die Lösungen qualitativ, indem Sie diese Funktionen für $t \in [0, 2]$ skizzieren.

Lösung. $y_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $y_2(t) = \exp(\frac{1}{2}t^2) - 1$, $y(t) = -\ln|1 - \frac{1}{2}t^2|$

7. Lösen Sie die linearisierte Pendelgleichung für

$$\varphi(0) = \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \dot{\varphi}(0) = 1.$$

Lösung. $\varphi(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + \varphi_0\cos(\omega t)$