1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(\sqrt{1-x})$.

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

   (b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

   Lösung.

   (a) Die Wurzel ist nur für nichtnegative Einträge definiert, d.h. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.

   (b) Das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ ist definiert durch

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2.$$

   Die erste und zweite Ableitung der Funktion f bestimmt man mit Verwendung der Kettenregel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\exp(\sqrt{1-x})\,\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \\ f''(x) &= \frac{1}{4}\exp(\sqrt{1-x})\,\frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \end{aligned}$$

   Damit ist $f(0) = \exp(1)$, $f'(0) = -\frac{\exp(1)}{2}$ und $f''(0) = 0$. Das gesuchte Taylor-Polynom ergibt sich dann zu

$$T_2(x) = \exp(1) - \frac{\exp(1)}{2}\,x.$$

2. Sei $z = 1 - \mathrm{i}$.

   (a) Berechnen Sie $\arg\left(z^7\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

   (b) Geben Sie $\mathrm{Im}(z^7)$ an.

Lösung.

(a) Zuerst wandeln wir z in Polarkoordinaten um. Der Betrag berechnet sich zu $r = |z| = \sqrt{2}$. Aus der Skizze kann man das Argument ablesen, oder mit $\arg(z) = \arctan(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}})$ berechnen. Da sich die komplexe Zahl im vierten Quadranten befindet, muss man 2π dazu addieren, um im gesuchten Intervall $[0, 2\pi)$ zu bleiben, also

$$\varphi = \arg(z) = \arctan(-1) + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

Damit können wir das gesuchte Argument berechnen.

$$\arg(z^7) = 7\,\arg(z) = 7\,\frac{-\pi}{4} = \frac{-7\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

(b) Wir berechnen nun z^7.

$$z^7 = \sqrt{2}^7\,\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 + 8\mathrm{i}$$

Damit ist $\mathrm{Im}(z) = 8$.

3. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \right\}$$

und das Skalarfeld $f(x, y) = x^2 y$.

(a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C f \, \mathrm{d}s.$$

Lösung.

(a) Um den Tangentialvektor zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Zeitableitung der Parametrisierung, $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ und deren Betrag $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$, also

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Allgemein ist der Tangentialvektor gegeben durch

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Da der gegebene Punkt $\boldsymbol{r}(t_0) = (1, 0)^T$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $t_0 = 0$. Der Tangentialvektor an der Stelle t_0 ist $\boldsymbol{T}(0) = (0, 1)^T$ und damit ist die gesuchte Tangente $\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{r}(t_0) + s\boldsymbol{T}(t_0)$ gleich

$$\boldsymbol{y}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es geht um ein Kurvenintegral 1. Art, also für $t \in [a, b]$ gilt

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Mit $f(\boldsymbol{r}(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t \sin t$ und $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = 1$ folgt

$$\int_C \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \, \mathrm{d}t.$$

Dieses Integral lösen wir mit Hilfe der Substitutionsmethode, $u = \cos t$ und $\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sin t} \mathrm{d}u$.

$$\int u^2 \sin t \left(-\frac{1}{\sin t} \right) \mathrm{d}u = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 t}{3} + C$$

Mit dem Einsetzen der Integrationsgrenzen erhalten wir

$$\int_C \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \, \mathrm{d}t = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{3} = 0.$$

4. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos t \\ \mathrm{e}^t \sin t \end{pmatrix} : t \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \right\}$$

und für $y \neq 0$ das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \sin(2y) + 2x \\ 2\mathrm{e}^x \cos(2y) - \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, warum $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Lösung.

(a) Ein Vektorfeld besitzt ein Potential, wenn das Vektorfeld stetig diffrenzierbar und wirbelfrei ist. Stetigkeit und Differenzierbarkeit sind ersichtlich, da die Einträge aus stetigen Funktionen zusammengesetzt sind und $y = 0$ ausgeschlossen ist. Weiters braucht man die Wirbelfreiheit, die man mittels der Integrabilitätsbedingung berechnen kann.

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mathrm{e}^x \cos(2y) - \frac{1}{y}\right) = 2\mathrm{e}^x \cos(2y)$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^x \sin(2y) + 2x\right) = 2\mathrm{e}^x \cos(2y)$$

Da $\frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y}$, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ besitzt ein Potential.

(b) Nun berechnen wir das Potential Φ, mit der Eigenschaft $\nabla\Phi = \boldsymbol{f}$.

$$\Phi(x,y) = \int \mathrm{e}^x \sin(2y) + 2x \ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin(2y) + x^2 + C(y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = 2\mathrm{e}^x \cos(2y) + C'(y)$$

Daraus erkennt man dass die folgende Gleichheit erfüllt sein muss.

$$2\mathrm{e}^x \cos(2y) + C'(y) = 2\mathrm{e}^x \cos(2y) - \frac{1}{y}$$

Damit muss $C(y)$ die Lösung der Gleichung $C'(y) = -\frac{1}{y}$ sein. Das bekommen wir indem wir die beiden Seiten von der Gleichung integrieren.

$$C(y) = -\int \frac{1}{y} \ \mathrm{d}y$$
$$C(y) = -\ln(y) + C$$

Das Potential $\Phi(x,y)$ ist damit gegeben als

$$\Phi(x,y) = \mathrm{e}^x \sin(2y) + x^2 - \ln(y) + C.$$

(c) Das Kurvenintegral berechnet man indem man den Hauptsatz über Kurvenintegrale verwendet.

$$\int_C \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi\left(\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \Phi\left(\boldsymbol{r}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Die Parametrisierung der Kurve ausgewertet an $t = \pm\frac{\pi}{4}$ lautet

$$\boldsymbol{r}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}\left(\tfrac{-\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\,\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das Kurveintegral zu

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \Phi\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\,\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right)\sin\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right) - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right)\sin\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right).\end{aligned}$$