1. Gegeben sei eine Diffusionsgleichung für $u = u(x,t)$, in der Form

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + u.$$

Verwenden Sie den Separationsansatz, um die allgemeine Lösung dieser Gleichung zu berechnen.

Lösung.

Wir verwenden den Ansatz $u(x,t) = v(t)w(x)$, und setzen in die gegebene Gleichung ein.

$$\begin{aligned} v'(t)w(x) &= \frac{1}{4}v(t)w''(x) + v(t)w(x) \\ \frac{v'(t)}{v(t)} &= \frac{1}{4}\frac{w''(x)}{w(x)} + 1 \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt beide seiten gleich einer Konstante κ, also

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \kappa = \frac{1}{4}\frac{w''(x)}{w(x)} + 1.$$

Wir lösen zuerst die Gleichung nach $v(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \kappa \\ \ln(v(t)) &= \kappa t + \tilde{c} \\ v(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{\kappa t} \end{aligned}$$

Weiters lösen wir die Gleichung nach $w(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\frac{w''(x)}{w(x)} + 1 &= \kappa \\ \frac{w''(x)}{w(x)} &= 4\kappa - 4 \\ w''(x) - w(x)(4\kappa - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die wir mit Hilfe des Exponentialansatzes lösen, und erhalten

$$w(x) = c_2\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\kappa-1}x} + c_3\,\mathrm{e}^{2\sqrt{\kappa-1}x}.$$

Damit hat die gesamte Lösung folgende Form

$$u(x,t) = c_1\,\mathrm{e}^{\kappa t}\left(c_2\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\kappa-1}x} + c_3\,\mathrm{e}^{2\sqrt{\kappa-1}x}\right).$$

Eine alternative Lösung erhalten wir indem wir die zwei gewöhnliche Differentialgleichungen umschreiben.

$$\frac{v'(t)}{v(t)} - 1 = \kappa = \frac{1}{4}\frac{w''(x)}{w(x)}$$

Die alternative Lösung berechnet man analog.

$$u(x,t) = c_1\,\mathrm{e}^{(\kappa+1)t}\left(c_2\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\kappa}x} + c_3\,\mathrm{e}^{2\sqrt{\kappa}x}\right)$$

2. Betrachten Sie für $y = y(t)$ die Differentialgleichung

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} - 4y = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $y = t^2$ eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.

(b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine zweite Lösung.

Lösung.

(a) Dies zeigen wir, indem wir die Lösung $y(t) = t^2$ zweimal ableiten und in die Gleichung einsetzen. Die erste Ableitung ist $\dot{y}(t) = 2t$ und die zweite Ableitung lautet $\ddot{y}(t) = 2$

$$\begin{aligned} 2t^2 + 2t^2 - 4t^2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Der Ansatz ist $y(t) = c(t)t^2$. Nach dem Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{c}(t)t^2 + 2tc(t) \\ \ddot{y}(t) &= t^2\ddot{c}(t) + 4t\dot{c}(t) + 2c(t) \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen erhalten wir

$$t^4\ddot{c}(t) + 5t^3\dot{c}(t) = 0.$$

Diese Differentialgleichung lösen wir mithilfe einer Ordnungsreduktion, wir setzen $z(t) = \dot{c}(t)$.

$$\begin{aligned} t^4\dot{z}(t) &= -5t^3 z(t) \\ \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -5\frac{1}{t} \\ \ln(z) &= -5\ln(t) + \tilde{c} \\ z(t) &= c^*\frac{1}{t^5} \end{aligned}$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten $c(t)$.

$$\begin{aligned} c(t) &= c^*\int \frac{1}{t^5}\,\mathrm{d}t \\ c(t) &= c\frac{1}{t^4} \end{aligned}$$

Die zweite Lösung lautet nun

$$y_2(t) = c\frac{1}{t^2}.$$

3. Betrachten Sie für $y = y(x)$ die Differentialgleichung

$$y \exp(xy) + 6x + (x \exp(xy) - 2)y' = 0.$$

(a) Begründen Sie, warum die Differentialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie ein erstes Integral.

Lösung.

(a) Die Exaktheit überprüfen wir mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung. Die umformulierte Differentialgleichung lautet

$$(y \exp(xy) + 6x)\ \mathrm{d}x + (\exp(xy) + y\, x \exp(xy))\ \mathrm{d}y = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y \exp(xy) + 6x) &= \exp(xy) + y\, x \exp(xy) \quad \text{und} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \exp(xy) - 2) &= \exp(xy) + y\, x \exp(xy). \end{aligned}$$

Also die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt und die Differentialgleichung ist exakt.

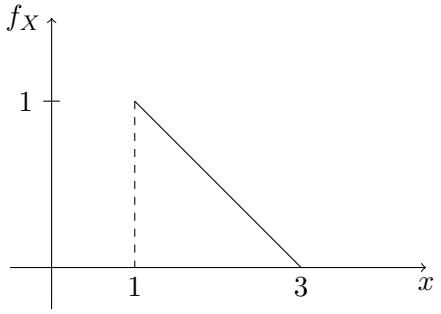
(b) Hier berechnen wir ein erstes Integral.

$$\begin{aligned} \int y \exp(xy) + 6x\, \mathrm{d}x &= \exp(xy) + 3x^2 + \hat{c}(y) \\ \int x \exp(xy) - 2\, \mathrm{d}y &= \exp(xy) - 2y + \tilde{c}(x) \end{aligned}$$

Damit können wir ein erstes Integral berechnen.

$$\Phi(x, y) = \exp(xy) + 3x^2 - 2y + C$$

4. Betrachten Sie eine Zufallsvariable X mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.



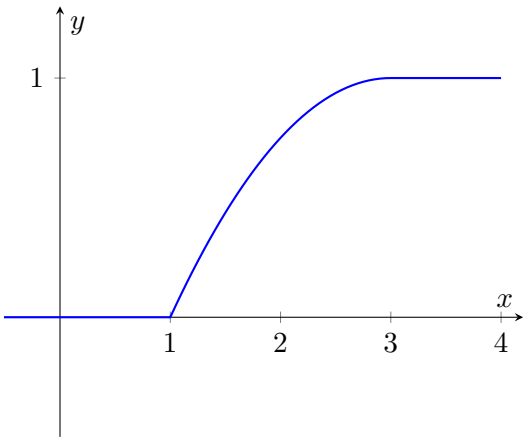
(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X und fertigen Sie eine Skizze dieser an.

(b) Zwei Ereignisse A, B sind definiert durch

$$A = \{0 \leq X < 2\} \quad \text{und} \quad B = \left\{\frac{3}{2} < X \leq 4\right\}.$$

Berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$ und $P(A \cup B)$.

Lösung.



(a) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann man von der Skizze ablesen.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x, & x \in [1,3) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion in dem Intervall $[1,3)$ erhalten wir folgendermaßen

$$\int_1^x \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s \mathrm{d}s = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}.$$

Damit ist die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4} & x \in [1,3) \\ 1 & x \in [3, \infty). \end{cases}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(A) &= F(2) - F(0) = \frac{3}{4} \\
P(B) &= F(4) - F(\tfrac{3}{2}) = \frac{9}{16} \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\{\frac{3}{2} \leq X \leq 2\}\right)}{P(B)} = \frac{5}{9} \\
P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P\left(\{\frac{3}{2} \leq X \leq 2\}\right)}{P(A)} = \frac{5}{12} \\
P(A \cup B) &= P\left(\{0 \leq X \leq 4\}\right) = 1
\end{aligned}
$$