1. Gegeben sei die Kurve
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -4+4t \\ 2+2t \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\},$$
sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \sin y + 3x^2 \\ x\cos y + \mathrm{e}^y(y+1) \end{pmatrix}.$$

   (a) Untersuchen Sie, ob $\boldsymbol{F}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential Φ.

   (b) Berechnen Sie $\int_C \boldsymbol{F}\mathrm{d}r$.

   Lösung.

   (a) Wegen der erfüllten Integrabilitätsbedingnung existiert das Potential.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\sin y + 3x^2) = \cos y$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\cos y + \mathrm{e}^y(y+1)\right) = \cos y$$
   Jetzt berechnen wir das Potential.
$$\int \sin y + 3x^2 \,\mathrm{d}y = x\sin y + x^3 + c$$
$$\int x\cos y + \mathrm{e}^y(y+1)\,\mathrm{d}y = x\sin y + y\mathrm{e}^y + c$$
   Wobei
$$\int \mathrm{e}^y(y+1)\,\mathrm{d}y = (y+1)\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{e}^y.$$
   Damit ist
$$\Phi(x,y) = x\sin y + x^3 + y\,\mathrm{e}^y + c.$$

   (b)
$$\int_C F\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi(\boldsymbol{r}(1)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0)) = 4\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 4\sin(2) + 4^3.$$
   Wobei
$$\boldsymbol{r}(1) = \begin{pmatrix} -4+4 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}(1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Betrachten Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y = y(t)$.

Lösung.

Um die homogene Lösung zu berechnen müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen.

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Damit sind die zwei Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$. Die homogene Lösung ergibt sich mit dem Exponentialansatz zu

$$y_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Bei der partikulären Lösung bemerken wir, dass es um eine äußere Resonanz handelt, und passen den Ansatz dementsprechend an und berechnen die zugehörige Ableitungen.

$$\begin{aligned} y_p(t) &= c\,t\,\mathrm{e}^{-2t} \\ \dot{y}_p(t) &= c\,\mathrm{e}^{-2t}(1-2t) \\ \ddot{y}_p(t) &= c\,\mathrm{e}^{-2t}(4t-4) \end{aligned}$$

Wir setzen die oben berechnete Ableitungen in die ursprüngliche Gleichung ein.

$$c\,\mathrm{e}^{-2t}(4t-4) + 3c\,\mathrm{e}^{-2t}(1-2t) + 2c\,t\,\mathrm{e}^{-2t} = 3\mathrm{e}^{-2t}$$

Daraus ergibt sich $c = -3$. Die allgemeine Lösung ist damit

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-t} - 3t\mathrm{e}^{-2t}.$$

3. Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe von Trennung der Variablen.

$$5\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + 4y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$$

Stellen Sie die Lösung als Funktion $y(x)$ dar.

Lösung.

$$\begin{aligned}
5\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + 4y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y &= 0 \\
4y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y &= -5\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{4y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y &= -\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

An dieser Stelle verwenden wir eine Substitution $y = \sin u$, dabei ist $\mathrm{d}y = \cos u\,\mathrm{d}u$ und $x = \sin z$ wobei $\mathrm{d}x = \cos z\,\mathrm{d}z$.

$$\int \frac{4\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,\mathrm{d}u = \int \frac{5}{\sqrt{1-\sin^2}}\cos z\,\mathrm{d}z$$

Da $\sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$ und $\sqrt{1-\sin^2 z} = \cos z$ sind, wird die Gleichung vereinfacht.

$$\begin{aligned}
\int 4\sin u\,\mathrm{d}u &= -\int 5\mathrm{d}z \\
-4\cos u &= -5z + c \\
-4\cos(\arcsin y)) &= -5\arcsin x + c
\end{aligned}$$

Die Lösung als Funktion $y(x)$ ergibt sich dann zu

$$y(x) = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{4}\arcsin x + c\right)\right).$$

4. Gegeben sei eine Funktion

$$P(X = x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{12}, & x = 1 \\ \frac{1}{6}, & x = 2 \\ a, & x = 3 \\ \frac{5}{12}, & x = 4 \\ 0, & x \geq 5 \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie a, sodass $P(X = x)$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und fertigen Sie eine Skizze an.

(c) Gegeben seien zwei Mengen,

$$A = \{0 \leq X \leq 2\} \quad \text{und} \quad B = \{0 \leq X \leq 4\}.$$

Berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A|B)$ sowie $P(B|A)$.

Lösung.

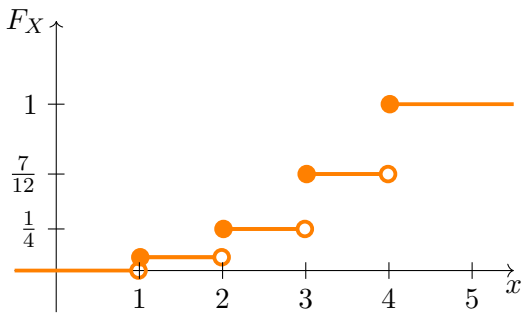
(a) Es muss gelten

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + a + \frac{5}{12} = 1.$$

Damit ist $a = \frac{1}{3}$.

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{12}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{12}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$



(c) Die Wahrscheinlichkeiten berechnet man mit Verwendung der Verteilungsfunktion.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= F(2) - F(0) = \frac{1}{4} \\
P(B) &= F(4) - F(0) = 1 \\
P(A \cup B) &= P(\{0 \leq X \leq 4\}) = 1 \\
P(A \cap B) &= P(A) = \frac{1}{4} \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \\
P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1
\end{aligned}
$$