1. (a) Die Bahn eines Massepunktes sei gegeben durch $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2+7, 2t^3-1, t\right)^T$. Man berechne die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.
   (b) Man bestimme eine Parameterdarstellung für die rechte Hälfte des Kreises mit dem Mittelpunkt $(3, -1)$ und dem Radius 2, wobei der Halbkreis im Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.
   Lösung: (a) $|\boldsymbol{v}(1)| = \sqrt{41}$, (b) $\boldsymbol{r}(\varphi) = (3 + 2\cos\varphi, -1 - 2\sin\varphi)^T$

2. (a) Die Geschwindigkeit eines Massepunktes sei gegeben durch $\boldsymbol{v}(t) = \left(1, t, 3t^2\right)$ und seine Position zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 1)$. Man bestimme die Bahn des Massepunktes.
   (b) Man bestimme eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahnkurve aus der Aufgabe 1(b) zum Zeitpunkt $t = 2$.
   Lösung: (a) $\boldsymbol{r}(t) = \left(t+1, \frac{t^2}{2}, t^3+1\right)^T$, (b) $\boldsymbol{T}(t) = (1+t, -2+2t, -15+12t)^T$.

3. Man berechne die Richtungsableitung von $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ in Richtung $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ an der Stelle $(1, 1)$. Man skizziere die Höhenschichtenlinie, auf der $(1, 1)$ liegt und zeichne auch $\nabla f(1, 1)$ als kleinen Pfeil ein.
   Lösung: $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = -3\sqrt{2}$

4. Sei f ein Skalarfeld gegeben durch $f(\boldsymbol{r}) = f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2 + x - 3y + 1$.

   (a) Berechnen Sie den Gradienten von f.
   (b) Berechnen Sie die Tangentialebene für $\boldsymbol{r_0} := (x_0, y_0) = (-1, 1)$.
   (c) Berechnen Sie das totale Differential von $z = f(x, y)$.
   (d) Berechnen Sie den Gradienten und das totale Differential an $\boldsymbol{r_0}$, sowie
   $$\boldsymbol{g} = \frac{1}{|\nabla f(\boldsymbol{r_0})|}\nabla f(\boldsymbol{r_0}).$$
   (e) Berechnen Sie für $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$
   $$\Delta z_1 = f(\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{g}) - f(\boldsymbol{r_0}), \qquad \Delta z_2 = f(\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{r_0}).$$

   Lösung. (a) $\nabla f(\boldsymbol{r}) = (2x + y + 1, x - 6y - 3)$, (b) $10y + z = 4$,
   (c) $\mathrm{d}z = (2x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (x - 6y - 3)\,\mathrm{d}y$, (d) $\nabla f(\boldsymbol{r_0}) = (0, -10)$, $\mathrm{d}z = -10\,\mathrm{d}y$, $\boldsymbol{g} = (0, -1)^T$
   (e) $\Delta z_1 = 7$, $\Delta z_2 \approx 6{,}5858$

5. Sei $h\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) = (\cos t)^{\sin t}$. Berechnen Sie die Ableitung h' auf zwei Arten:

   (a) Durch Differenzieren von h mit Hilfe der Ableitungsregeln.
   (b) Anwendung der Kettenregel auf $h = f \circ \boldsymbol{r}$ mit
   $$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(x, y) = x^y.$$
   Geben Sie geeignete Definitionsbereiche für $\boldsymbol{r}$ und f an.

Lösung. (a) $h'(t) = (\cos t)^{\sin t}\left(\cos t \ln(\cos t) - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)$, (b) $\boldsymbol{r}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

6. Gegeben sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(5t) \\ 3\cos(5t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Berechnen Sie die Funktion der Bogenlänge $s = s(t)$ und die gesamte Bogenlänge L.

Lösung. $s(t) = 15t$, $L = 30\pi$

7. (a) Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x, y) = (2x - y, x^2)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ entlang der Strecke von $(1, 1)^T$ nach $(3, -2)^T$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ entlang der Kurve mit der Parameterdarstellung $\boldsymbol{r} = \left(t, 1 - \frac{3}{4}(t-1)^2\right)^T$, $1 \le t \le 3$.

Lösung. (a) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -4$, (b) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -9$

8. Gegeben sei das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ -14yz \\ 20xz^2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \left(3x^2 + 6y\right) \mathrm{d}x - 14yz\,\mathrm{d}y + 20xz^2\,\mathrm{d}z.$$

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Kurve C mit der Parameterdarstellung $\boldsymbol{r} = \left(t, t^2, t^3\right)^T$, $0 \le t \le 1$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Strecke C von $(0, 0, 0)^T$ nach $(1, 1, 1)^T$.

Lösung. (a) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 5$, (b) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{13}{3}$