1. Gegeben sei eine Vollkugel K um den Punkt $M = (0,0,0)^T$ mit dem Radius $R = 3$. Berechnen Sie das folgende Integral.

$$I = \int_K (x^2 + y^2 + z^2)^4 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Lösung. $I = \frac{708588}{11}\pi$ $= 64417\pi = 202372$

2. Sei E eine Ellipse definiert durch die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Berechnen Sie das folgende Integral.

$$I = \int_E (x+y)^2 \,\mathrm{d}(x,y)$$

Lösung. $I = \frac{ab}{4}\pi(a^2+b^2)$. $ab\pi\,(a^2+b^2)$

3. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin(t).$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung. $y(t) = c\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{\sin(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2}$ $\to \exp(\sin - \cos)/2 + c\,e^{-t}$

4. Bestimmen Sie die homogene Lösung, eine partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + \frac{x(t)}{t} = \mathrm{e}^t.$$

Lösung. $x(t) = \frac{(t-1)\mathrm{e}^t + c}{t}$ $\to (t-1)e^t + \frac{c}{t}$

5. Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = -\frac{y}{x}.$$

Skizzieren Sie das passende Richtungsfeld und bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegbenen Differentialgleichung.

Lösung. $y(x) = \frac{c}{x}$

6. Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = t(1+y).$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$.

Lösung. $y(t) = c\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 1$

7. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -2x(t)\sin(t)$$

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung und die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 2$.

Lösung. $x(t) = \frac{2}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^{2\cos(t)}$

8. Geben Sie die Lösung $x(t)$ der folgenden Differentialgleichung an.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\sin(x(t))}$$

Lösung. $x(t) = \arccos(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} + c)$